Ámbito Científico-Tecnológico

MÓDULO IV ESPAD

CEPA Altomira (Tarancón)

Curso 2023/24

PARTE nº 10: Estudio sistemático de las funciones polinómicas de primer y segundo grado. Estudio gaseoso de la materia.

- **Tema 1**: Funciones. Función lineal. Función cuadrática.
- **Tema 2**: La materia. Gases.

PARTE nº 11: Genética. Salud. Probabilidad.

- **Tema 3**: Genética celular.
- **Tema 4**: Salud y enfermedad.
- **Tema 5**: Probabilidad.

PARTE nº 12: Trigonometría. Estudio de los movimientos. Trabajo, Energía y Calor.

- **Tema 6**: Trigonometría.
- **Tema 7**: Cinemática. Movimientos de interés.
- **Tema 8**: Dinámica. Fuerzas de interés.
- **Tema 9**: Trabajo, Energía y Calor.

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 10: ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO. ESTUDIO GASEOSO DE LA MATERIA.

TEMA 1. FUNCIONES, FUNCIÓN LINEAL. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

1. CONCEPTOS INICIALES.

1.1. MAGNITUDES Y VARIABLES.

Se llama **magnitud** a cualquier característica de los objetos y seres vivos que se pueda medir y expresar numéricamente. Así por ejemplo, la masa de los cuerpos será una magnitud porque se puede medir (12 kg), o el volumen (2 m^3), o la altura de una persona (1,70 cm), etc.

Las **variables** son símbolos que representan el conjunto de valores que puede tomar una determinada *magnitud*.

Las *variables* pueden ser **independientes** (si no dependen de ninguna otra) y **dependientes** (aquellas que dependen de otra). Esto es así porque ambas están relacionadas. Lógico, para que una variable sea dependiente tiene que estar relacionada mediante dependencia con la independiente.

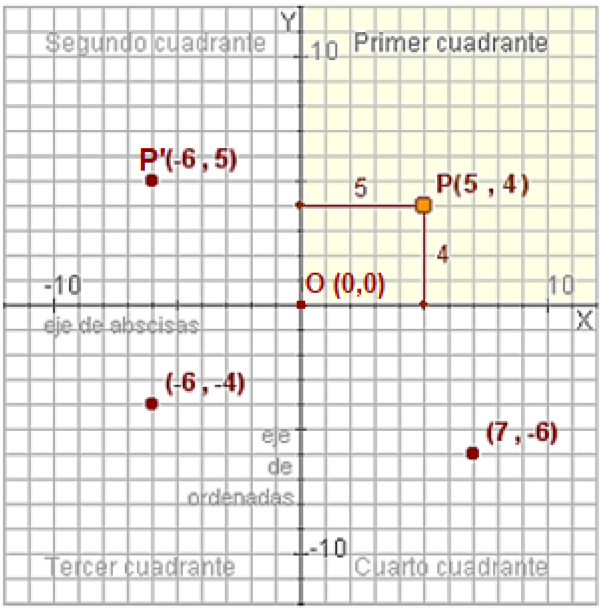
Un ejemplo podría ser el precio de la entrada y la ubicación en el campo de fútbol (fondo, tribuna, anfiteatro…). Así pues, la ubicación en el campo es la variable independiente y el precio de la entrada, la variable dependiente porque depende de dónde nos sentemos.

Las *variables* se expresan con letras y generalmente se usan la **x** para la *variable independiente* y la **y** para la *dependiente*.

1.2. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS (EJES DE COORDENADAS).

Para representar y localizar puntos en el plano se utiliza el **sistema de coordenadas cartesianas**, formado por dos rectas perpendiculares llamadas **ejes cartesianos**.

El *sistema de coordenadas cartesianas* debe su nombre a *René Descartes*, matemático y filósofo francés del siglo XVII.



Los *ejes cartesianos* se gradúan según una escala y dividen al plano en cuatro *cuadrantes*. El punto en que se cortan es el **origen de coordenadas**.

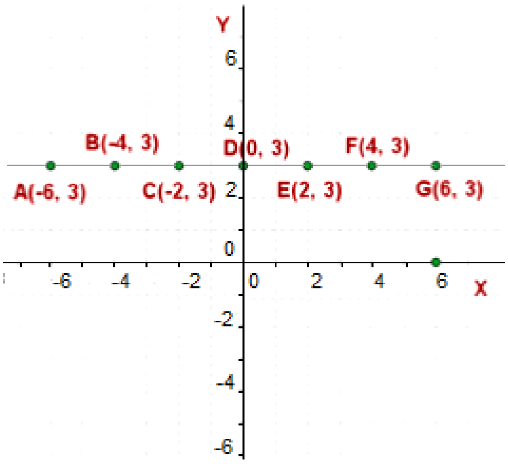
A cada punto del plano le hacemos corresponder un par de números (x, y), **las coordenadas del punto**.

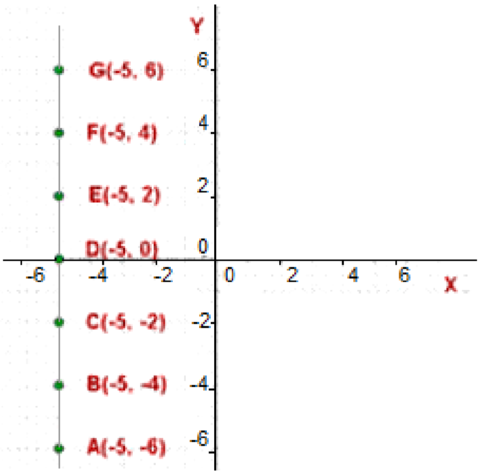
- En el *eje horizontal*, o de **abscisas**, también llamado **eje X**, se representa la primera coordenada, *x*.
- En el *eje vertical* o de **ordenadas**, también llamado **eje Y**, se representa la segunda coordenada, *y*.

- En cada *cuadrante* podrás observar que están representados varios puntos. Para escribirlos se empieza siempre por el valor en el *eje de abscisas* y después el de ordenadas separados por una coma. Ejemplo: P (5,4); P' (-6,5).

El *origen de coordenadas*, **O**, tiene de coordenadas: O (0, 0). Los puntos situados en el *eje de abscisas* tienen su ordenada igual a 0 (y = 0). Los puntos que están en el *eje de ordenadas* tienen su abscisa igual a 0 (x = 0).

Los puntos situados en la misma línea horizontal (paralela al eje de abscisas) tienen la misma ordenada. Los puntos situados en una misma línea vertical (paralela al eje de ordenadas) tienen la misma abscisa.





1.3. TABLA DE VALORES.

Una vez que ya sabemos colocar los puntos en los *ejes cartesianos*, vamos a ver cómo situamos todos los valores de las variables para representarlos gráficamente después.

Una **tabla de valores** es una representación de datos, mediante *pares ordenados de números*, que expresan la relación existente entre dos magnitudes o variables. Los pares de números obtenidos nos servirán para su posterior *representación gráfica*.

Ejemplo: Vamos a poner en una tabla de valores los litros de gasolina gastados y el importe a pagar en euros (€).

1 litro	2 litros	5 litros	6 litros	10 litros	20 litros
1,45	2,90	7,25	8,70	14,50	29,00

De igual manera que antes, aquí también tenemos pares de puntos, el P(1,1,45), el P'(2, 2,90) o el P''(10,14,50), por ejemplo. Ahora falta representarlos gráficamente.

Como veremos a continuación, las *gráficas* son útiles para comparar datos y obtener información de forma fácil e intuitiva.

1.4. ELABORACIÓN DE GRÁFICAS A PARTIR DE TABLAS DE VALORES.

Una vez que tenemos confeccionada la *tabla de valores*, llega el turno de su *representación gráfica* en los ejes cartesianos. Es un proceso muy sencillo, basta tan solo con situar el valor a marcar en cada uno de los ejes y trazar las líneas perpendiculares por ellos hasta que se corten. Ese punto de corte representa el par a representar.

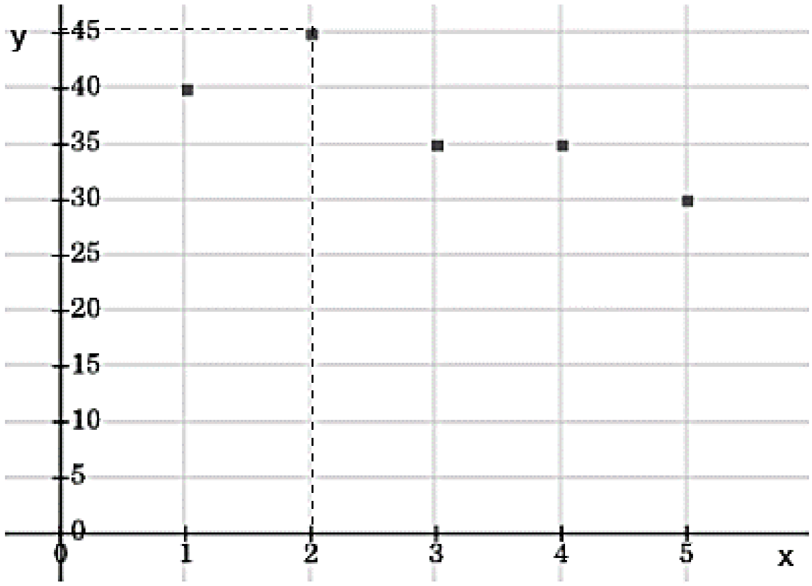
Vamos a representar un par de ejemplos para su mejor comprensión. En estos casos nos proporcionan la tabla de valores; en el caso que no fuera así, la haríamos nosotros dando valores a la *variable independiente (x)* para obtener el valor de la *variable independiente (y)*. Después iremos situando en los *ejes de coordenadas*, los pares de puntos obtenidos.

Ejemplo 1:

Representemos gráficamente el tiempo que emplea un corredor en dar vueltas a un circuito.

Tabla de valores

vueltas	*Tiempo (s)*
1ª vuelta	40
2ª vuelta	45
3ª vuelta	35
4ª vuelta	35
5ª vuelta	30



En este caso solo representamos los puntos y no los unimos porque el tiempo no depende directamente de las vueltas. Hay otros factores que pueden influir en el desarrollo de cada vuelta (cansancio, sprint, carrera táctica, etc.).

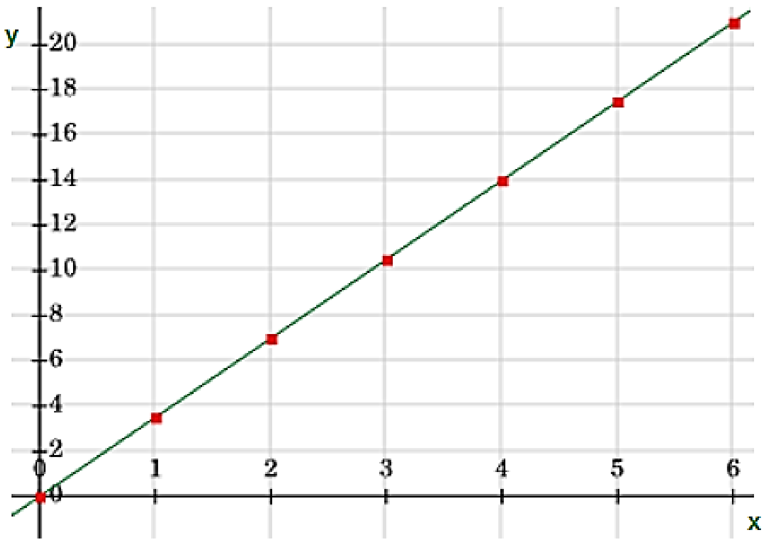
Ejemplo 2:

Ahora vamos a representar gráficamente el coste que tiene enviar por mensajería un paquete a una determinad ciudad.

La tabla de valores es la siguiente:

Peso (kg)	1	2	3	4	5	6
Precio (€)	3,50	7,00	10,50	14,00	17,50	21,00

Ahora representaremos los pares de puntos resultantes de relacionar *el peso* con el *precio del envío* del paquete postal, quedando unidos todos ellos. Esto quiere decir que existe alguna dependencia entre las variables.



Cuanto más pese el paquete más nos costará enviarlo por mensajería.

El *precio (euros)* es la *variable dependiente* porque depende del *peso del paquete* que es la *variable independiente*.

1.5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Una ecuación de segundo grado es una igualdad del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a*, *b* y *c* son números reales conocidos con a $\neq$ 0, y reciben el nombre de *coeficientes* de la ecuación de segundo grado. Al igual que en el caso de las ecuaciones de primer grado, al número desconocido *x* se le llama *incógnita*.

Puede ocurrir que "*b*" o "*c*" sean cero, dando lugar a las **ecuaciones de segundo grado incompletas**.

Ejemplos:

a) $3x^2 + 5x + 6 = 0$ donde $a = 3$; $b = 5$ y $c = 6$.

b) $2x^2 - 9x + 7 = 0$ donde $a = 2$; $b = -9$ y $c = 7$.

c) $-6x + x^2 - 8 = 0$ donde $a = 1$; $b = -6$ y $c = -8$.

Se llaman **soluciones** de una *ecuación de segundo grado* a los valores de la "*x*" que hacen que se verifique la igualdad: $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplo: $x = 1$ es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 1 = 0$ puesto que:

$$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 2 - 2 = 0$$

1.5.1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS.

Hemos visto que las ecuaciones de segundo grado incompletas pueden ser de dos tipos, dependiendo de si $b = 0$ o si $c = 0$.

- **Caso 1**: $b = 0$

  En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Para resolverlas se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita *x*. Hay que tener en cuenta que:

- Si el radicando es mayor que cero obtendremos dos soluciones, la raíz cuadrada con signo positivo y la raíz cuadrada con signo negativo.
- Si el radicando es cero la solución es $x = 0$.
- Si el radicando es negativo la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales.

Nota: el radicando de una raíz es "aquello que se encuentra dentro de la raíz".

Ejemplo:

$$3x^2 - 24 = 0$$

Despejamos x^2:

$$3x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{3} \Rightarrow x^2 = 8$$

Extraemos la raíz cuadrada de 8. Como 8 es positivo tenemos dos soluciones:

$$x = \sqrt{8} = \begin{cases} x_1 = +\sqrt{8} \\ x_2 = -\sqrt{8} \end{cases}$$

- **Caso 2**: $c = 0$

  En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita *x* pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es $x_1 = 0$. La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado.

Veámoslo:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>:

$$3x^2 - 18x = 0$$

Sacamos *x* factor común:

$$x \cdot (3x - 18) = 0$$

Una solución es $x_1 = 0$. La otra se obtiene de igualar a cero el factor $3x - 18$:

$$x(3x-18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x - 18 = 0 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \dfrac{18}{3} \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

1.5.2. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO. CASO GENERAL.

En este caso vamos a suponer que los tres coeficientes *a*, *b* y *c* son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes *a*, *b* y *c* en la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa que el símbolo ± indica que, para obtener las dos posibles soluciones, hay que sumar por un lado y restar por otro:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$, situada en el interior de la raíz de la fórmula que proporciona las soluciones, se le llama *discriminante* (Δ) de la ecuación de segundo grado. Pueden ocurrir tres cosas:

- Si el discriminante es mayor que cero ($b^2 - 4ac > 0$) la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales (véase el ejemplo anterior).
- Si el discriminante es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$) la ecuación de segundo grado tiene una única solución, que se suele llamar solución doble. Esta solución se obtiene mediante la expresión: $x = \dfrac{-b}{2a}$

- Si el discriminante es menor que cero (b^2 - $4ac < 0$) la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales. La razón es, de nuevo, la no existencia de raíces cuadradas de números negativos en el conjunto de los números reales.

  Ejemplo 1:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

En este caso a = 3, b = - 5 y c = - 2. Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm 7}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{5+7}{6}\Rightarrow x_1=2 \\ x_2=\frac{5-7}{6}\Rightarrow x_2=-1/3 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

Ahora tenemos que $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$. Por tanto el discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

Como el discriminante es igual a cero, la solución de la ecuación de segundo grado es única. Ésta es:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\cdot 4}=\frac{12}{8}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

2. FUNCIONES.

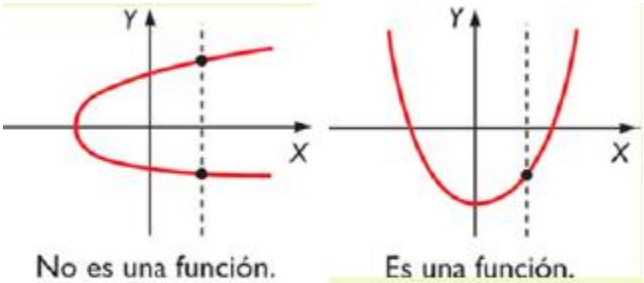
Una **función** es una *relación* entre dos *magnitudes* o *variables numéricas*, que suelen designarse con *x* e *y*.

- ***x*** es la **variable independiente**.
- ***y*** es la **variable dependiente**.

Una característica fundamental es que la *función* asigna a cada valor de **x** un **único valor** de **y**. Además se dice que:

- **y** es **función** de **x**, y se escribe **y = f(x)**.
- **y** es la **imagen** de **x** mediante la función **f**.

Para que una gráfica se corresponda con una *función*, cada valor de la *variable independiente* ha de tener como máximo una sola *imagen*.



Las funciones sirven para describir fenómenos de muy diversos tipos: físicos, económicos, sociológicos..., o simplemente para expresar relaciones matemáticas.

2.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Para visualizar el comportamiento de una función recurrimos a su **representación gráfica**. Sobre unos *ejes de coordenadas* se representan las dos variables:

- La variable **independiente**, **x**, sobre el eje horizontal o de **abscisas**.

- La variable **dependiente**, **y**, sobre el eje vertical o de **ordenadas**.

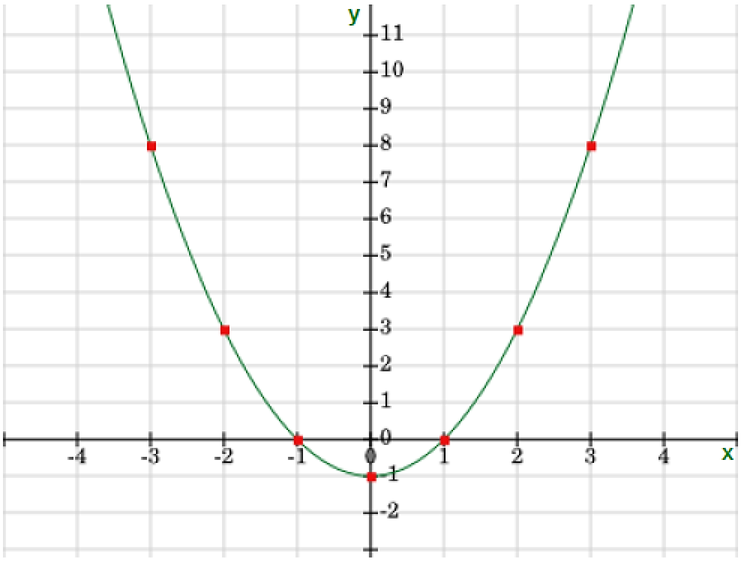
Así cada par de valores (*x,y*) relacionados por la función son las coordenadas de un punto de la gráfica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1:

Sea la función $y = x^2 - 1$. Construyamos la *tabla de valores*. Para ello damos valores a la variable *x* y obtendremos el resultado de la variable *y*.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$(-3)^2 - 1 = 8$	$(-2)^2 - 1 = 3$	$(-1)^2 - 1 = 0$	-1	0	3	8

Ahora procedemos a su representación gráfica en los ejes cartesianos.

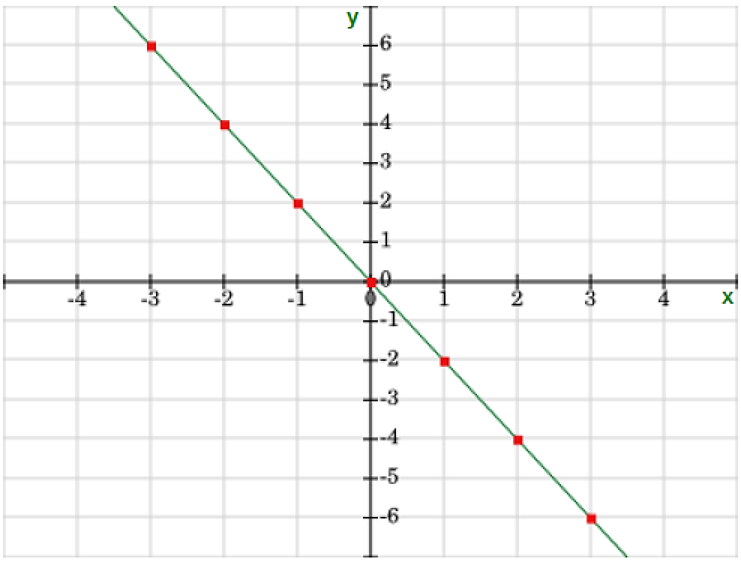


Representación gráfica de la función: $y = x^2 - 1$.

Ejemplo 2:

Sea la función $y = -2x$. Construyamos la *tabla de valores*. Para ello damos valores a la variable *x* y obtendremos el resultado de la variable *y*.

Ahora procedemos a su representación gráfica en los ejes cartesianos.



Representación gráfica de la función: $y = -2x$.

2.2. FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN.

Hay diferentes formas de expresar una función: con un **enunciado**, con una **fórmula** o **expresión algebraica**, con una **gráfica** o con una **tabla**.

- **Mediante un enunciado.**

Algunas funciones se pueden describir mediante un *enunciado* que indique la relación existente entre la *variable dependiente* y la *independiente*. Al traducir al lenguaje algebraico este enunciado, la expresión algebraica que se obtiene es la ecuación de la función, **y = f(x)**.

<u>Ejemplo</u>: Oferta de viaje: <<Descubra el encanto de las islas griegas por 110€ al día todo incluido: vuelo, transportes y pensión completa>>

Como el precio del viaje depende del número de días (*x*), la función que tenemos que hallar será: **f(x) = 110·x**.

- **Mediante una fórmula.**

En ocasiones las funciones vienen dadas mediante una *fórmula* o *expresión algebraica*, **y = f(x)**, a la que se llama la **ecuación** de la función. Esta fórmula relaciona las dos magnitudes: la variable independiente *x*, con la variable dependiente *y*.

<u>Ejemplo</u>: Como el precio (*y*) de las vacaciones depende del número de días (*x*), la función es: **y = f(x) = 110·x**.

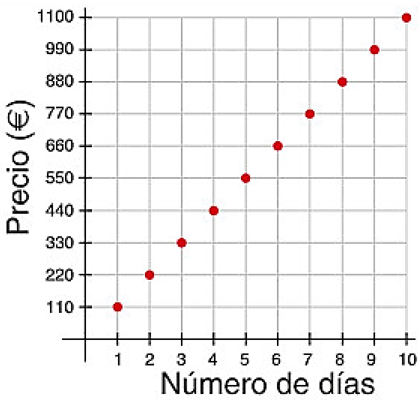
- **Mediante una tabla.**

En este caso se expresa la función mediante una tabla de valores que relaciona los valores de la variable independiente *x* con los valores de variable dependiente *y*.

<u>Ejemplo</u>: El número de días (*x*) y el precio (*y*) son las dos variables relacionadas.

Número de días (*x*)	1	2	3	4	5	6
Precio (*y*)	110	220	330	440	550	660

- **Mediante una gráfica.**



La función se expresa a través de una gráfica. A través de todos los puntos (x,y) representados en la gráfica, se puede construir una *tabla de valores*.

<u>Ejemplo</u>: En esta gráfica observamos la evolución del precio del viaje en función del número de días que estemos.

A partir de cualquiera de estas cuatro formas de expresión se pueden obtener todas las demás, así partiendo del *enunciado* se puede escribir la *fórmula*, de la *fórmula* obtener una *tabla de valores* que posteriormente transformaremos en una *gráfica*.

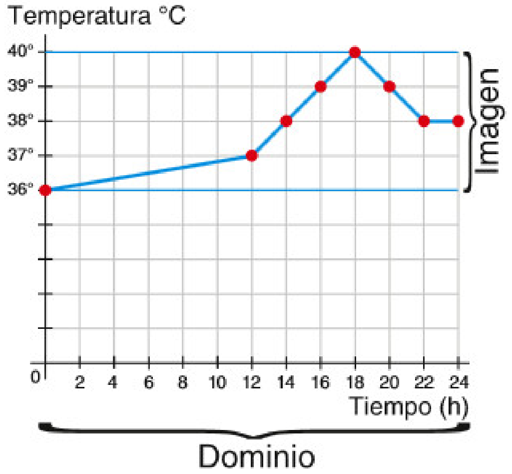
2.3. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.

Llamaremos **dominio** de la función, al conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente *x*, para los cuales existe un valor de *y*, es decir, para los que existe imagen. El *dominio* se representa por **Dom (f)**.

Llamamos **imagen** o **recorrido** de la función, al conjunto de valores que toma la variable dependiente *y*, que corresponden a los valores de *x* del *dominio*. Se representa por **Im (f)** o **R (f)**.

Ejemplo:

La siguiente gráfica representa la evolución de la temperatura corporal de una persona enferma a lo largo de un día.



- La *variable independiente x* es el tiempo expresado en horas (h).
- *La variable dependiente y* es la temperatura corporal en grados centígrados. Se observa que para cada hora del día, *x*, hay un único valor de temperatura, *y*.
- El *dominio* son todas las horas del día. El *recorrido* son todas las temperaturas comprendidas entre 36 y 40 ºC.

Cálculo del dominio

El cálculo del *dominio* dependerá de si nos dan la función en forma *gráfica* o con una *fórmula* o *ecuación*. En cualquiera de los dos casos consideraremos siempre que el *dominio* es el conjunto de valores de *x* para los cuáles la función existe.

- A partir de una fórmula

  La *fórmula* o *ecuación* de una función es la expresión que nos dice qué operaciones debemos hacer con cada valor de *x* para obtener su correspondiente valor *y = f(x)*.

  - Cuando en la fórmula aparezcan **polinomios**, la variable *x* podrá tomar cualquier valor.
  - Cuando en la fórmula aparezcan **cocientes**, hay que asegurarse que el denominador no se anule.
  - Cuando en la fórmula aparezca alguna expresión dentro de una **raíz de índice par**, hay que asegurarse que el radicando sea mayor o igual que 0.

  Ejemplos:

  - Calcula el dominio de la siguiente *función polinómica*:

    $$y = f(x) = x^2 + 2x + 1$$

    Como *x* puede tomar cualquier valor, su dominio es: **Dom f = ℝ.**

  - Calcula el dominio de la siguiente *función racional*:

    $$y = f(x) = \frac{3 + 2x}{x - 5}$$

    El dominio de esta función es el conjunto de los números reales distintos de *x* = *5*. Ya que si sustituimos *x* por *5*, estaremos dividiendo por 0.Es decir: **Dom f = ℝ - {5}**.

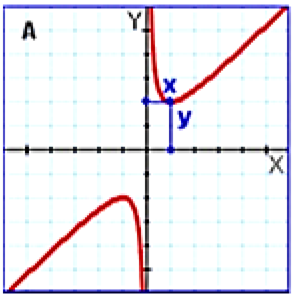
- Calcula el dominio de la siguiente *función radical*:

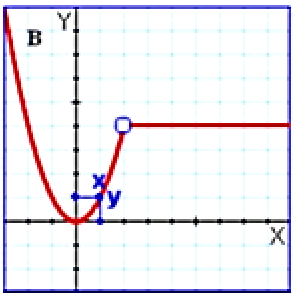
$$y = f(x) = \sqrt{x-2}$$

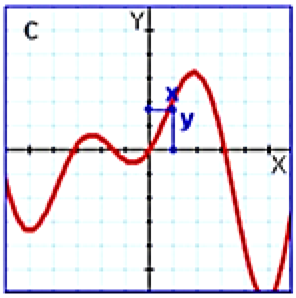
Dado que el radicando debe ser positivo, es necesario que $(x - 2) \geq 0$. Los números reales que lo cumplen serán los $x \geq 2$. Luego su dominio es: **Dom f = [2, +∞)**.

- <u>A partir de una gráfica</u>

En el caso de que nos den una *gráfica* para calcular el *dominio*, recorreremos el eje de abscisas (eje X) para determinar qué números reales tienen *imagen*. Y para obtener el *recorrido* haremos lo mismo respecto del eje de ordenadas (eje Y).





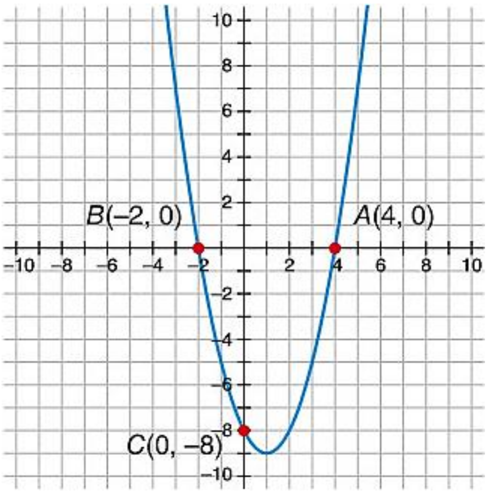


2.4. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES.

2.4.1. PUNTO DE CORTE CON LOS EJES.

- **Con el eje X:** para hallar los puntos de corte de la función con el *eje X*, se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación obtenida.
- **Con el eje Y:** para hallar los puntos de corte de la función con el *eje Y*, se sustituye el valor $x = 0$ en la fórmula de la función.

<u>Ejemplo</u>: Hallar los puntos de corte con los ejes de la función, $y = x^2 - 2x - 8$.



- *Con el eje X*: Hacemos $y = 0 \rightarrow 0 = x^2 - 2x - 8$, y resolvemos la ecuación de segundo grado. Las soluciones son $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Por tanto los puntos de corte son *A(4,0) y B(-2,0)*.
- *Con el eje Y*: Sustituimos x = 0 en la función: $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, luego el punto de corte es *C(0, -8)*.

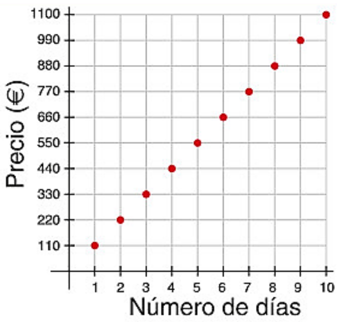
2.4.2. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD.

La función es **continua** si su gráfica se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se dice que la función es **discontinua**. Los puntos donde se interrumpe la gráfica son **puntos de discontinuidad**.

Las *discontinuidades* en las funciones se pueden presentar porque:

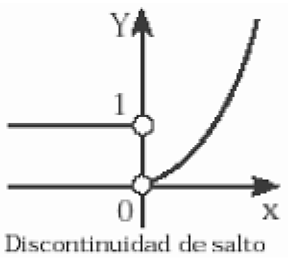
- **No hay valores intermedios entre dos puntos.**

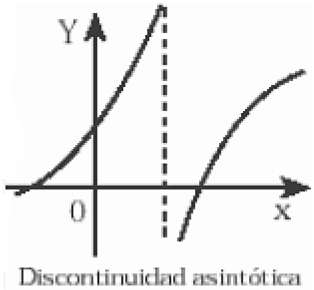
  Esto es debido a que la variable *x* toma valores concretos.

  Ejemplo: en la oferta de viaje de apartados anteriores, el número de días que nos vamos de vacaciones tiene que ser un número natural. Por eso la gráfica es de puntos. No podemos irnos de viaje 3,2 días, ni – 2 días, por ejemplo.

- **Hay uno o varios saltos.**

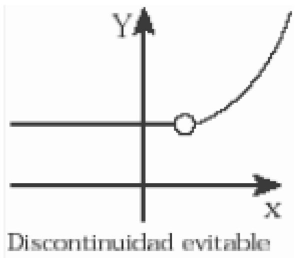
  

  Aquí nos podemos encontrar dos tipos de saltos: *finitos* o *infinitos*.

  Si el salto es *finito*, la función toma valores diferentes en algún tramo o tramos de la gráfica. Si el valor de la función crece (o decrece) indefinidamente cuando nos acercamos a un punto, se produce un salto *infinito*.

- **No está definida la función en un punto.**

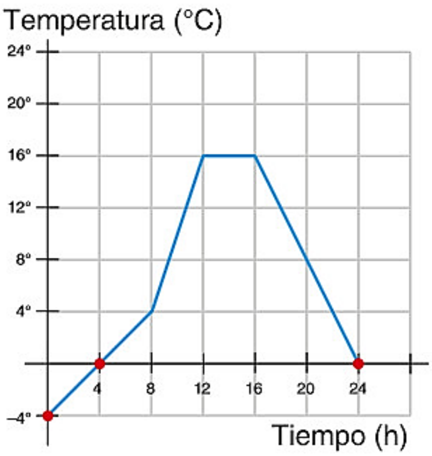
  Debes tener en cuenta que cuando queremos indicar que una función no está definida en un punto, ponemos un *circulito* en la gráfica.

2.4.3. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

Una función es **creciente** cuando al aumentar los valores de la variable independiente *x*, también aumentan los valores de la variables dependiente *y*.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar los valores de la variable independiente *x*, disminuyen los valores de la variable dependiente *y*.

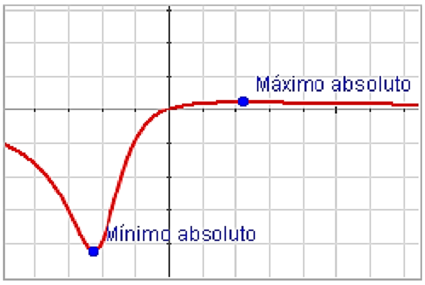
Una función es **constante** si el cambiar el valor de alguna de las variables, la otra permanece constante.



Ejemplo: La gráfica muestra una función que relaciona la temperatura en una ciudad con la hora del día.

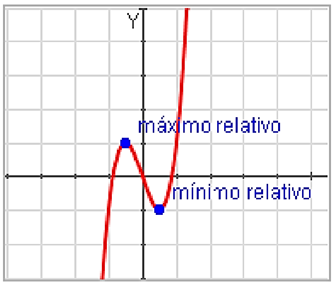
- *La función es creciente* en el intervalo (0,12). A medida que avanza el día, la temperatura aumenta.
- *La función es constante* en el intervalo (12,16). Entre esas horas la temperatura se mantiene a 16 ºC.
- *La función es decreciente* en el intervalo (16,24). Desde las 16:00 horas la temperatura empieza a descender.

2.4.4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.



Otro aspecto que podemos analizar en una gráfica es la existencia de valores *extremos*. Estos *extremos* pueden ser de dos tipos **absolutos** y **relativos**.

- Los **extremos absolutos** (**máximos** y **mínimos**) nos proporcionan el mayor y el menor valor de todas las imágenes, si existen para la función que se estudia.
- Los **extremos relativos** son valores **máximos o mínimos relativos** de los que les rodean.
  - Aquel punto de la gráfica de una función continua pasa de ser creciente a decreciente es un **máximo relativo**.
  - Aquel punto de la gráfica de una función continua pasa de ser decreciente a creciente es un **mínimo relativo**.



3. FUNCIONES ELEMENTALES.

Las **funciones elementales**, de las que conocemos sus propiedades, su gráfica y su fórmula, nos ofrecen unos modelos que nos permiten interpretar muchos de los fenómenos de la vida corriente y de las ciencias, e incluso, predecir su comportamiento.

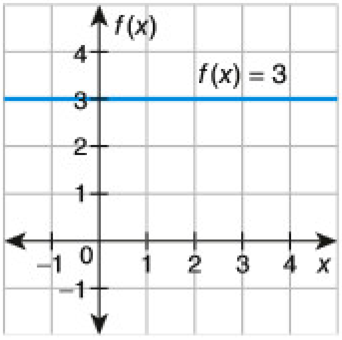
Estas funciones se pueden estudiar desde dos aspectos: su *gráfica* o su *fórmula*. Las que vamos a trabajar en esta unidad son las **polinómicas** (*constantes*, *lineales* y *afines*, *cuadráticas*). A continuación se muestran en una tabla sus características principales:

Nombre	Fórmula	Gráfica	Fenómenos
Constantes	$f(x) = b$	Una recta paralela al eje x	*Tarifa plana de Internet*
Proporcionalidad directa o lineal	$y = ax$	Una recta que pasa por el origen de coordenadas	*Compra de artículos* *Dosis de medicamentos* *Interés simple*
Función afín	$f(x) = ax + b$	Una recta	*Recibo de luz, teléfono, gas y todos aquellos servicios que tengan unos gastos fijos a los que se añade el consumo.* *Sueldos de vendedores que trabajan a comisión*
Función cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$	Una parábola	*Lanzamiento de proyectiles* *Relación entre el área y el perímetro de un campo*

3.1. FUNCIONES POLINÓMICAS.

3.1.1. FUNCIONES CONSTANTES.

La **función constante** es una *función polinómica* de grado 0 y de ecuación **y = f(x) = b**, que corta al eje Y en el punto *(0, b)* y su grafica es una recta paralela al eje X. Es una función que tiene siempre el mismo valor, independientemente del valor que toma la variable *x*.



Ejemplo: En la gráfica de la derecha se representa una *función contante*, *y = 3*.

3.1.2. LA FUNCIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN AFÍN.

La función lineal o de proporcionalidad directa

La **función lineal** es una *función polinómica* de grado 1 que se escribe matemáticamente de la siguiente manera: **y = ax**, en donde la **x** es la *variable independiente*; **y** la *variable dependiente*; **a** es un número llamado **constante de proporcionalidad** (representa la **pendiente de la recta**).

Al representarla gráficamente nos sale una **recta** que siempre pasa por el punto **P (0,0)**.

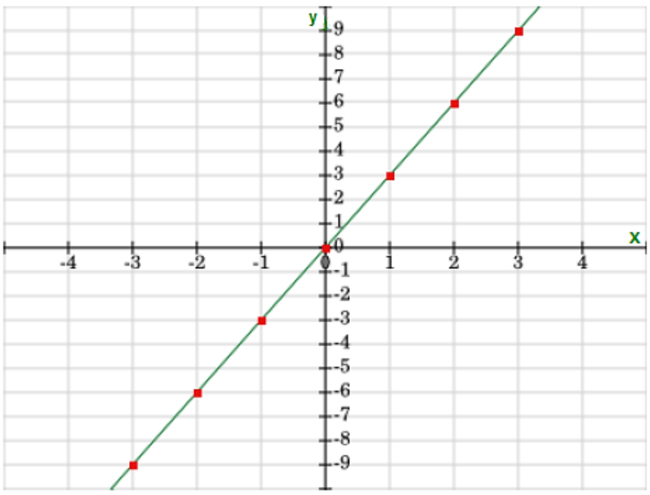
Si **a > 0**, la pendiente es positiva y la recta es creciente. Si **a < 0**, la pendiente es negativa y la recta es decreciente.

Ejemplo:

Sea la función *y = 3x*. Construyamos la *tabla de valores*. Para ello damos valores a la variable *x* y obtendremos el resultado de la variable *y*.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-6	-3	0	3	6	9

Ahora procedemos a su representación gráfica en los ejes cartesianos.



Representación gráfica de la función: y = 3x.

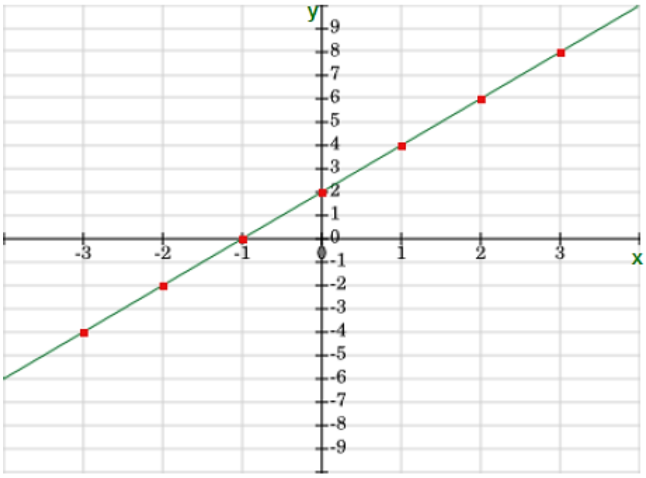
La función afín

La **función afín** es una *función polinómica* de grado 1 que se escribe matemáticamente de la siguiente manera: **y = ax + b**, en donde la **x** es la *variable independiente*; **y** la *variable dependiente*; **a** es la **pendiente de la recta** y **b** es el **punto de corte** de la función con el *eje de ordenadas*.

Ejemplo: Sea la función *y = 2x + 2*. Construyamos la *tabla de valores*. Para ello damos valores a la variable *x* y obtendremos el resultado de la variable *y*.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6	8

Ahora procedemos a su representación gráfica en los ejes cartesianos.



Representación gráfica de la función: y = 2x + 2.

Al representarla gráficamente la recta que nos sale ya **no pasa por el punto P(0,0)** sino que se desplaza dos unidades hacia arriba de dicho punto, concretamente al punto P'(0,2).

Seguro que te has dado cuenta de que las *funciones lineal* y *afín* son **rectas** que responden a la fórmula: ***y = ax + b***, de tal forma que si *b = 0* estamos ante la *función lineal*.

Dos aspectos importantes de cualquier recta son la **pendiente** y el valor de **ordenada en el origen** (punto de corte de la recta con el eje de ordenadas).

- La pendiente

  La **pendiente** es la **inclinación de la recta**, cuanto más inclinada, más pendiente y viceversa. Y la inclinación o pendiente viene dada por el número que acompaña a la *x*, es decir, la *constante de proporcionalidad* (**a**).

  Para calcular la pendiente de cualquier recta tomamos dos puntos de dicha recta, por ejemplo el P(x_0,y_0) y el P'(x_1,y_1), en donde la primera coordenada del punto corresponde al valor en el *eje x* y la segunda, al valor en el *eje y*. Su valor lo podemos calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

  Ejemplo: *y = 3x*

  Tomando dos puntos pertenecientes a esa recta, por ejemplo el P(0,0) y el P'(1,3), su pendiente valdría:

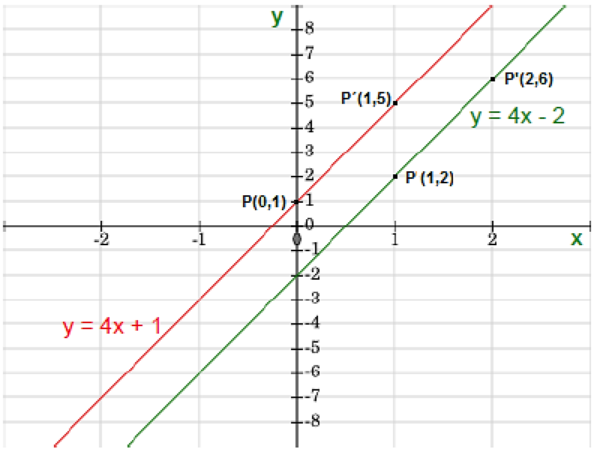
$$\boldsymbol{a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3}$$

  Dos **rectas paralelas**, sean funciones lineales o afines, tendrán la **misma pendiente**.

  - Ordenada en el origen

La **ordenada en el origen** es el número representado por la letra ***b*** y es el punto donde la recta corta al *eje de ordenadas (Y)*. La recta cortará al *eje Y* por encima o por debajo del cero, según sea positivo o negativo el valor de *b*.

Veamos un ejemplo. Dadas las gráficas de dos rectas, vamos a calcular sus pendientes, las ordenadas en el origen y la fórmula matemática que las representa.



Para calcular la *pendiente* de la recta 1 (---) tomamos dos puntos pertenecientes a ella, por ejemplo P(1,5) y el P'(0,1).

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5-1}{1-0} = 4$$

La *ordenada en el origen* será 1, porque corta al eje Y en ese punto → ***b₁ = 1***. Así pues la recta será: *y = 4x + 1*.

Para calcular la *pendiente* de la recta 2 (---) tomamos dos puntos pertenecientes a ella, por ejemplo P(1,2) y el P'(2,6).

$$a_2 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{6-2}{2-1} = 4$$

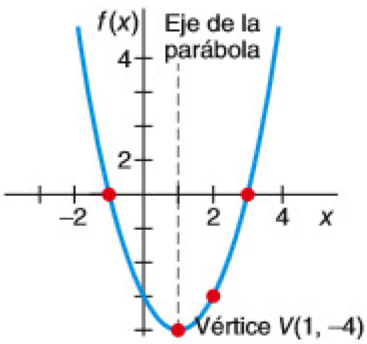
La *ordenada en el origen* será -2, porque corta al eje Y en ese punto → ***b₂ = -2***. Así pues la recta será: *y = 4x – 2*.

Como se puede comprobar las dos rectas son *paralelas*, al tener la misma pendiente.

Si quisiéramos calcular la ecuación de una recta de pendiente ***a*** y que pasa por un punto ***A(x₀, y₀)***, su fórmula sería:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

3.1.3. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA.



Las funciones que hemos estudiado anteriormente eran las polinómicas de grado uno, y la gráfica correspondiente era una *recta*.

Si aumentamos el grado, entramos en la familia de las funciones polinómicas de grado dos, cuya fórmula general es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

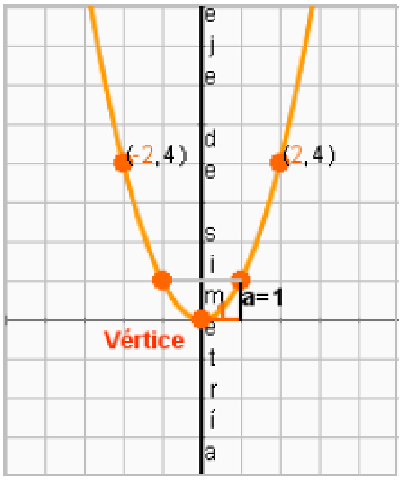
donde **a, b** y **c** son valores reales, y además **a ≠ 0**.

La gráfica de esta función es una curva llamada **parábola**, que tiene:

- Un **eje de simetría vertical** situado en la recta $x = -b/2a$.
- Un **vértice** que es el punto donde se alcanza el **máximo** o el **mínimo**. Este punto tiene de coordenadas **(-b/2a, f(-b/2a))**.

El valor de **c** tiene como efecto subir *c* unidades la parábola, si *c* es positivo, o bajarla *c* unidades si es negativo.

El caso más sencillo de parábolas es si **b = c = 0**, es decir, **y = f(x) = ax²**. Observa la gráfica y comprueba que tiene las siguientes características:



- El punto (0, 0) se llama **vértice** de la *parábola*.
- Si **a > 0** tiene un **mínimo absoluto** en (0,0).
- Si **a < 0** tiene un **máximo absoluto** en (0,0).
- El **signo** de **a** determina la *concavidad* o *convexidad* de la gráfica.

<u>Ejemplo 1</u>: Dibuja las funciones siguientes:

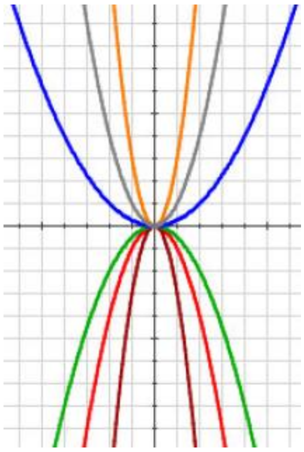
a) $y = -x^2$

b) $y = 0{,}5x^2$

c) $y = 3x^2$

d) $y = -3x^2$

e) $y = -0{,}5x^2$



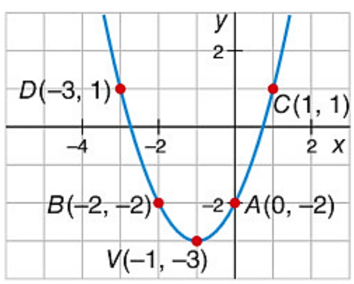
Habrás observado que cuanto mayor es *a* en valor absoluto, más estrecha es la parábola y además si *a > 0* se abre hacia arriba, mientras que si *a < 0* se abre hacia abajo.

<u>Ejemplo 2</u>: Representa la parábola $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

a) Hallamos el *eje de simetría* a partir de los coeficientes: *a = 1, b = 2*, entonces $x = -2/2\cdot 1 \rightarrow$ ***x = -1***.

b) Construimos una tabla de valores.

x	$f(x) = x^2 + 2x - 2$	Puntos:
−1	$(-1)^2 + 2(-1) - 2 = -3$	→ *V*(−1 −3)
0	$(0)^2 + 2(0) - 2 = -2$	→ *A*(0, −2)
−2	$(-2)^2 + 2(-2) - 2 = -2$	→ *B*(−2, −2)
1	$(1)^2 + 2(1) - 2 = 1$	→ *C*(1, 1)
−3	$(-3)^2 + 2(-3) - 2 = 1$	→ *D*(−3, 1)



Representamos la parábola

<u>Puntos de corte con el eje X</u>

Los puntos donde la parábola corta al eje X tienen la coordenada *y = 0*, es decir,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Por tanto los *puntos de corte con los ejes* son las **soluciones** de la ecuación de 2º grado correspondiente. Al resolver una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, pueden darse tres casos:

- **La ecuación tiene dos soluciones** → la parábola corta en dos puntos al eje X.
- **La ecuación tiene una solución** → la parábola tiene en ese punto el *vértice* y es un punto del eje X.
- **La ecuación no tiene ninguna solución** → la parábola no corta al eje X.

<u>Punto de corte con el eje Y</u>

El punto de corte de la parábola con el eje Y, tiene de *coordenada* $x = 0$. Lo que implica que su *coordenada* y vale:

$$\boldsymbol{y = a \cdot 0^2 + 0 \cdot x + c \rightarrow y = c}$$

Es decir, el punto de corte de la parábola con el eje Y tiene de coordenadas ***(0, c)***.

RESUMEN DEL TEMA 1

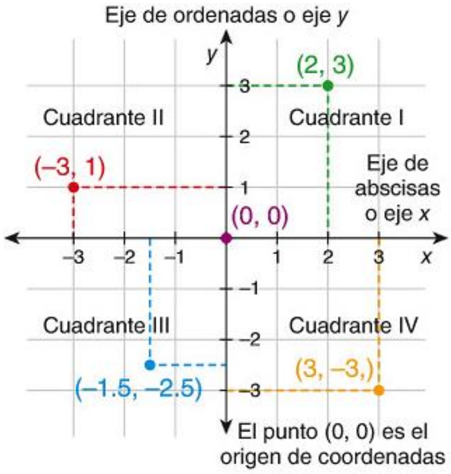
1. CONCEPTOS INICIALES.

1.1. MAGNITUDES Y VARIABLES.

Se llama **magnitud** a cualquier característica de los objetos y seres vivos que se pueda medir y expresar numéricamente.

Las **variables** son símbolos que representan el conjunto de valores que puede tomar una determinada *magnitud*. Las *variables* pueden ser **independientes** (si no dependen de ninguna otra) y **dependientes** (aquellas que dependen de otra).

1.2. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.



Un **sistema de coordenadas cartesianas** está formado por dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente. Cada una de estas rectas recibe el nombre de **eje de coordenadas**.

En un *sistema de coordenadas*, un punto *P* viene dado por un par de números *(x,y)* que van a ser las **coordenadas** cartesianas del **punto P**.

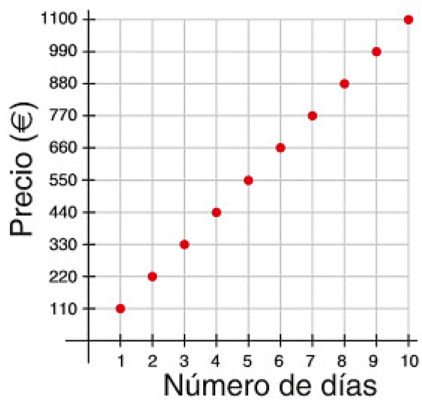
Al primer número **x** se le denomina *abscisa* del punto *P*, y se representa sobre el **eje X**. Al número **y** se le denomina **ordenada** del punto *P*, y se representa sobre el **eje Y**.

1.3. TABLA DE VALORES.

Una **tabla de valores** es una representación de datos, mediante *pares ordenados de números*, que expresan la relación existente entre dos magnitudes o variables. Los pares de números obtenidos nos servirán para su posterior **representación gráfica**.

1.4. OBTENCIÓN DE UNA GRÁFICA A PARTIR DE UNA TABLA DE VALORES.

Número de días (x)	1	2	3	4	5	6
Precio (y)	110	220	330	440	550	660



Una vez que tenemos confeccionada la *tabla de valores*, llega el turno de su **representación gráfica** en los *ejes cartesianos*. Es un proceso muy sencillo, que consiste en ir trasladando cada uno de los valores de las **variables relacionadas** a cada uno de los **ejes de coordenadas**. Posteriormente iremos trazando líneas perpendiculares a los ejes por cada uno de estos puntos, hasta que se corten dichas líneas. Los puntos de corte de esas líneas, representan los *pares de valores* a representar.

1.5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una *igualdad algebraica* que se puede expresar en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

siendo **a**, **b** y **c** números reales y a ≠ 0.

- **a** y **b** son los *coeficientes* de la ecuación.
- **c** es el **término independiente**.

Si b ≠ 0 y c ≠ 0, se dice que la ecuación es **completa**. Si b = 0 o c = 0 la ecuación es **incompleta**.

Completas: **$ax^2+bx+c=0$**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2-4ac>0$ tiene 2 soluciones
- Si $b^2-4ac=0$ tiene 1 solución doble
- Si $b^2-4ac<0$ no tiene solución

Incompletas:

- **$ax^2+c=0$**

  $-c/a>0$, soluciones: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

  $-c/a<0$, sin solución.

  $c=0$, 1 solución doble, $x=0$
- **$ax^2+bx=0$**

  Soluciones: $x=0$, $x=-b/a$

2. FUNCIONES.

Una **función** es una relación entre dos *variables* numéricas: a cada valor de la **variable independiente** (**x**), se le asocia un **único valor** de la **variable dependiente** (**y**). Se dice que *y* es la **imagen** de **x** mediante la función **f** y se representa **y = f(x)**.

El conjunto de todos los valores *x* que tienen *imagen* se llama **dominio** y se escribe **Dom f**. El conjunto de todas las *imágenes*, *y = f(x)*, se llama **recorrido** y se representa **Im f**.

Una función puede expresarse de cuatro formas:

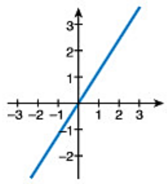
1) **Enunciado** que describe la función verbalmente. Ej.: Un kilogramo de plátanos cuesta 1,20 €.

2) **Fórmula o expresión algebraica** que relaciona la variable independiente x con la variable dependiente y. Ej.: $f(x) = 1{,}20 \cdot x$, donde *x* es la cantidad de plátanos y *f*(*x*) es el precio.

3) **Tabla de valores** que relaciona la *x* con la *y*. Ej.:

Cantidad (kg)	1	2	3	4
Precio (€)	1,20	2,40	3,60	4,80

4) **Gráfica.** Se dibujan los puntos y se hace la gráfica. Ejemplo:



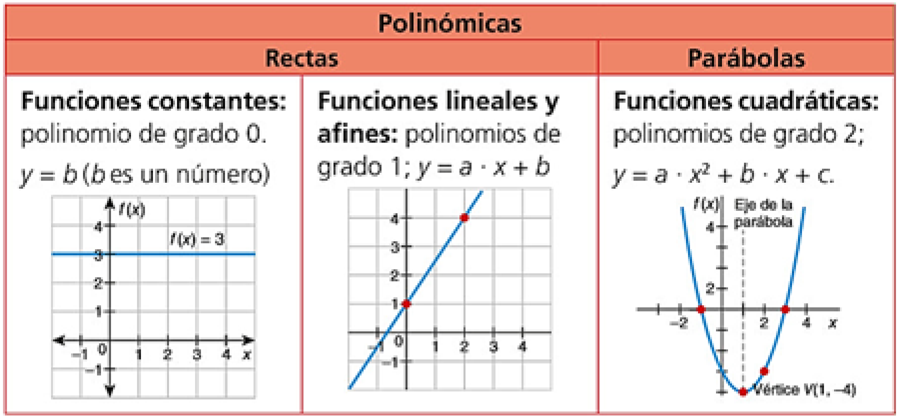
2.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES.

- **Puntos de corte con los ejes**. Punto donde la gráfica de la función corta con el *ejes X* o con el *eje Y*.
- **Continuidad o discontinuidad**. Una función es **continua** si se puede dibujar de un solo trazo. Una función es **discontinua** si no puede realizarse lo anterior. Las discontinuidades pueden darse en *puntos concretos* donde no está definida la función o producirse por presentar *saltos finitos* o *infinitos*.
- **Creciente y decreciente**. Una función es *creciente* si se cumple que *f(a)* < *f(b)* cuando *a* < *b*. Es decir si *x* aumenta, *y* también aumenta. Una función es decreciente si se cumple que si *a* < *b* entonces *f(a)* > *f(b)*. Es decir si *x* aumenta, *y* disminuye.
- **Máximos y mínimos**. Una función tiene un **máximo absoluto** o *relativo* en un punto, cuando la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Tendrá un **mínimo absoluto** o **relativo** en un punto, cuando la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

3. FUNCIONES ELEMENTALES

Las **funciones elementales** de las que conocemos sus propiedades, su gráfica y su fórmula, nos ofrecen unos modelos que nos permiten interpretar muchos fenómenos e incluso predecir su comportamiento. Entre las más utilizadas se encuentran las **polinómicas**.

Dentro de las *polinómicas* destacan las funciones **constantes**, *lineales* (de *proporcionalidad directa*), **afines** y **cuadráticas**. Estas funciones nos permiten describir fenómenos o conceptos como el *interés simple*, las *tarifas planas* de determinados servicios, el *cálculo del gasto en servicios esenciales (luz, agua, teléfono)*, el *lanzamiento de proyectiles*, etc.



3.1. LAS FUNCIONES POLINÓMICAS.

3.1.1. LA FUNCIÓN CONSTANTE.

Una **función es constante** cuando su valor no varía, independientemente del valor que tome la variable *x*. Su ecuación es de la forma **y = f(x) = b**, donde *b* es el valor constante que toma la función. La función corta al eje Y en el punto *(0, b)* y su grafica es una recta paralela al eje X.

3.1.2. LA FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Una **función es lineal** si su ecuación es de la forma **y = ax**, siendo **a** la **constante de proporcionalidad** o **pendiente**. La *gráfica* de una *función lineal* es siempre una **recta** que pasa por el origen de coordenadas *(0,0)*.

La **pendiente** de la recta es la inclinación que tiene respecto al eje X y conincide con el valor de **a**. Si **a > 0** la recta es *creciente* y si **a < 0** la recta es decreciente.

3.1.3. LA FUNCIÓN AFÍN.

Una **función es afín** si su ecuación es de la forma **y = ax + b** (siendo $a \neq 0$; $b \neq 0$). Su *gráfica* es una **recta** que no pasa por el origen de coordenadas *(0,0)*, donde el coeficiente **a** es la **pendiente** de la *recta* y **b** es la **ordenada en el origen**, es decir, el punto de corte de la recta con el eje Y. Si $P(x_0,y_0)$ es un punto perteneciente a esta recta, cumplirá su ecuación.

Podemos calcular la *pendiente* de cualquier recta dados dos puntos de ella, $P(x_0,y_0)$ y $Q(x_1,y_1)$, mediante la siguiente fórmula: $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

3.1.4. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Una **función es cuadrática** si su ecuación es de la forma $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ (siendo $a \neq 0$). La gráfica de esta función es una **parábola**, que tiene un *eje de simetría vertical* en la recta $\mathbf{x = -b/2a}$ y un **vértice** donde alcanza su *máximo* o su *mínimo*, de coordenadas $\mathbf{(-b/2a, f(-b/2a))}$.

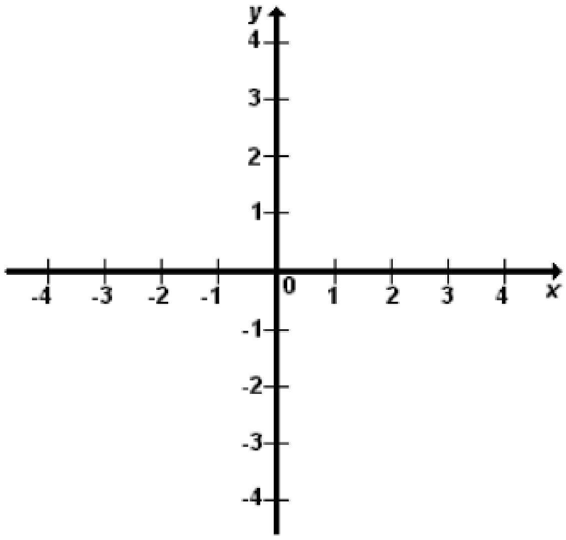
Presenta un **mínimo** en su vértice si $\mathbf{a > 0}$ y un **máximo** si $\mathbf{a < 0}$; por tanto, si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$ se abre hacia abajo.

El grado de abertura está determinado por el valor de **a**. Los **puntos de corte con el eje X** son las *soluciones* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

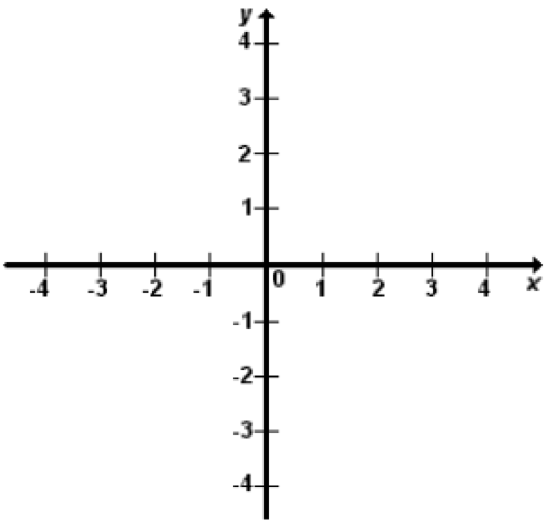
El valor de *c* tiene como efecto subir *c* unidades la parábola, si *c* es positivo, y bajarla *c* unidades si es negativo. Tambien **c** es la ordenada del **punto de corte** de la parábola **con el eje Y**.

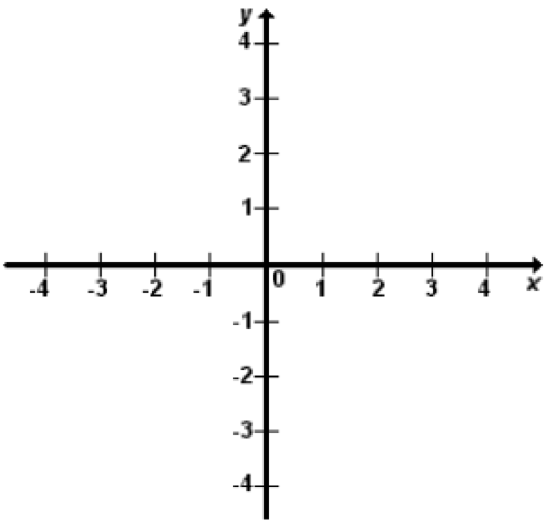
<u>ACTIVIDADES DEL TEMA 1</u>: "FUNCIONES. FUNCIONES LINEALES. FUNCIONES CUADRÁTICAS"

1. **Representa en el siguiente eje de coordenadas los siguientes puntos: (2,4), (-3,2), (-1,-3), (2,-1), (0,3), (2,0).**



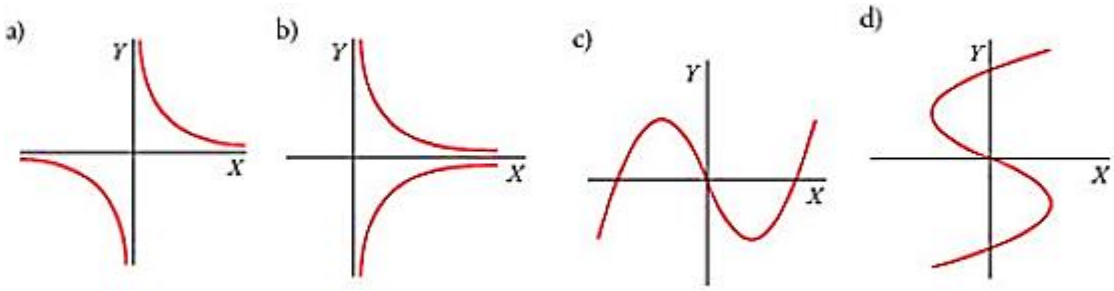
2. **Representa las siguientes rectas en el mismo eje de coordenadas.**
   a) $y = 2$; b) $y = -2$; c) $y = x$; d) $y = -2x$.
3. **Representa las siguientes funciones afines:**
   a) $y = 2x - 1$; b) $y = -2x - 1$; c) $y = \frac{1}{2}x - 1$; d) $y = -\frac{1}{2}x - 1$.





4. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:**
   a) $3x^2 - 24 = 0$
   b) $6x^2 + 12 = 0$
   c) $3x^2 - 18x = 0$
5. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**
   a) $x^2 - 8x + 12 = 0$
   b) $x^2 + 10x + 25 = 0$
   c) $2x^2 + x + 3 = 0$

6 Determina cuáles de las siguientes gráficas representa una función. Justifica tu respuesta.



6. Calcula la imagen de la función en cada caso:

a) Si x = 0 y x = - 4, para la función f(x) = 6x – 24.

b) Calcula las imágenes de x = 0 y x = - 8, para la función f(x) = (23x + 40)/(16x - 24).

c) Calcula f(0) y f(-3), siendo f(x) = 12x – 4.

d) Halla f(-1) y f(2), siendo f(x) = (8x – 5)/(3x + 2).

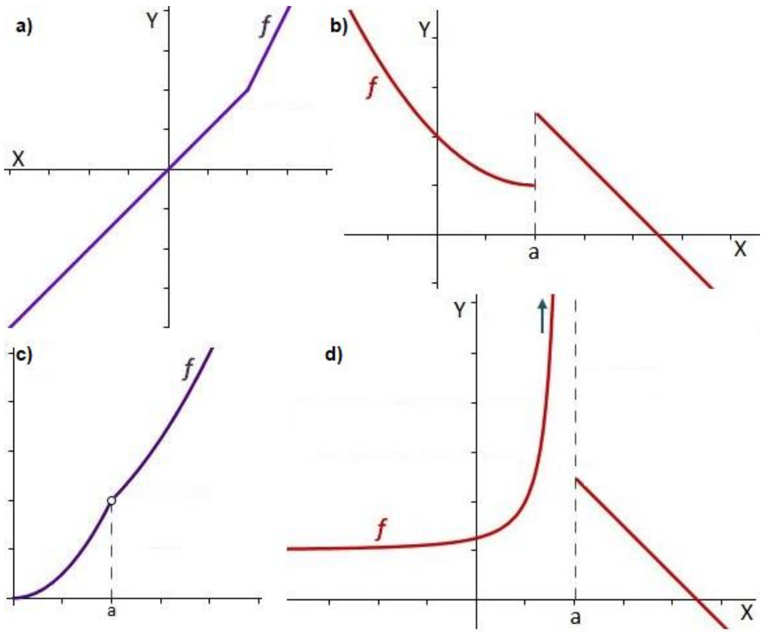
e) Calcula f(-3), f(4) y f(0), siendo $f(x) = 5 - x^2$.

f) De x = - 5 y x = −1/3, siendo $f(x) = 3x^2 + 2x$.

7. Calcula el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x + 6$	f) $f(x) = \dfrac{3x+25}{x^2-9}$
b) $f(x) = x^2 - 3x$	g) $f(x) = \dfrac{6x+18}{x^2+5}$
c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$	h) $f(x) = \sqrt{3x - 42}$
d) $f(x) = \dfrac{18x+38}{3x+18}$	i) $f(x) = \sqrt{3x + 18}$
e) $f(x) = \sqrt{6x - 39}$	j) $f(x) = \sqrt{25 - 5x}$

8. Indica cuáles de las siguientes funciones son continuas o discontinuas.



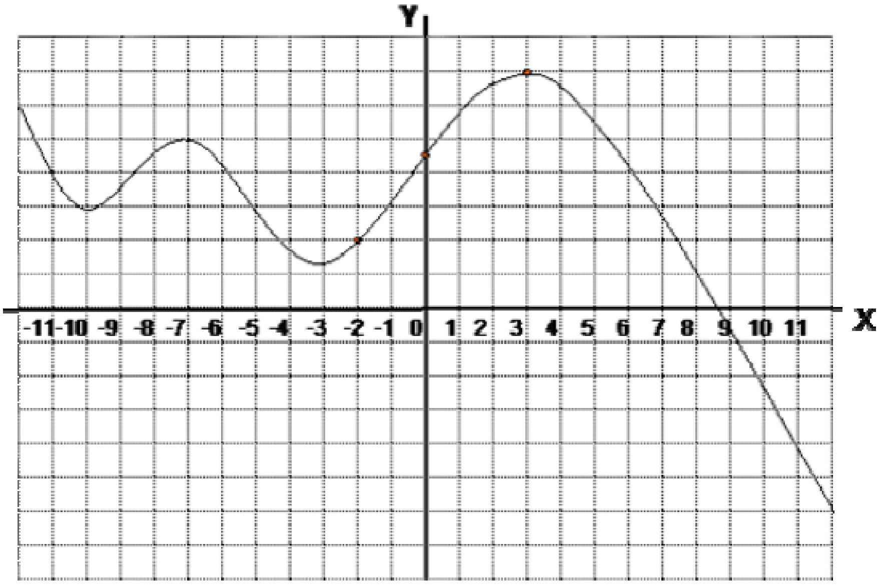
9. **Observa la gráfica siguiente y determina:**

a) Su valor en los puntos *x = - 2*, *x = 0* y *x = 3*.

b) Los *intervalos de crecimiento* y *decrecimiento*.

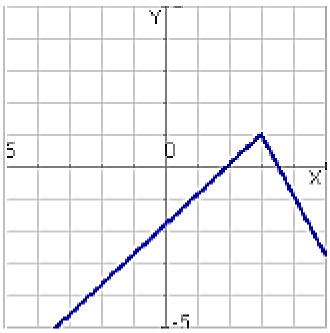
c) Los valores de *x* en los que se alcanzan *máximos o mínimos relativos*.

Ten en cuenta que la función está definida en el intervalo (–∞, +∞).

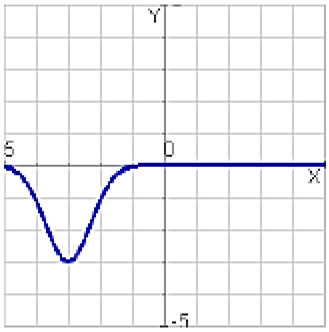


10. **Las funciones siguientes están definidas en el intervalo (-∞, +∞). Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y si alcanzan algún máximo o mínimo.**

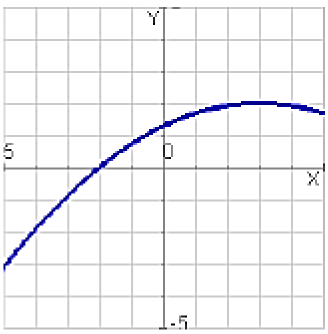
a)



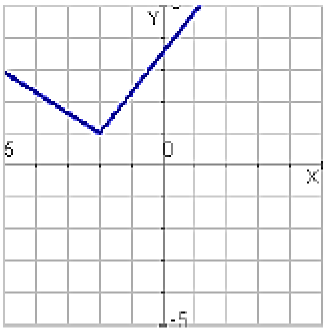
b)



c)

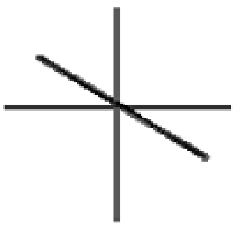


d)

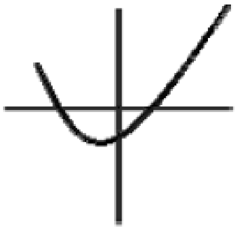


11. **Mira las siguientes gráficas e indica cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles no son lineales.**

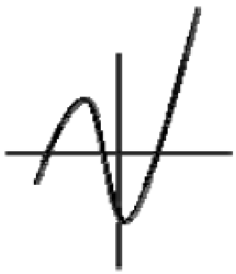
a)



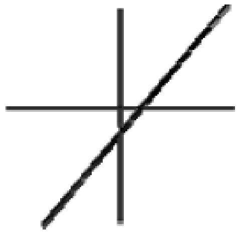
b)



c)



d)



12. **Dadas las siguientes funciones lineales, f(x) = 3x y f(x) = -x, indica en cada caso:**

a) Valor de *f(x)* para los siguientes valores de *x*:

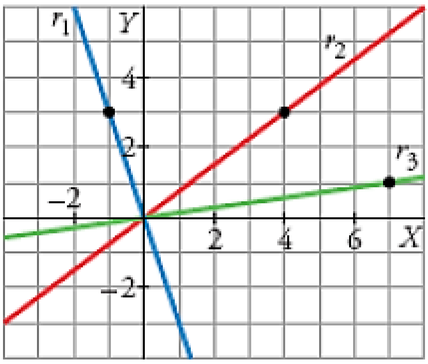
x:	-2	0	2
f(x):			

x:	-2	0	2
f(x):			

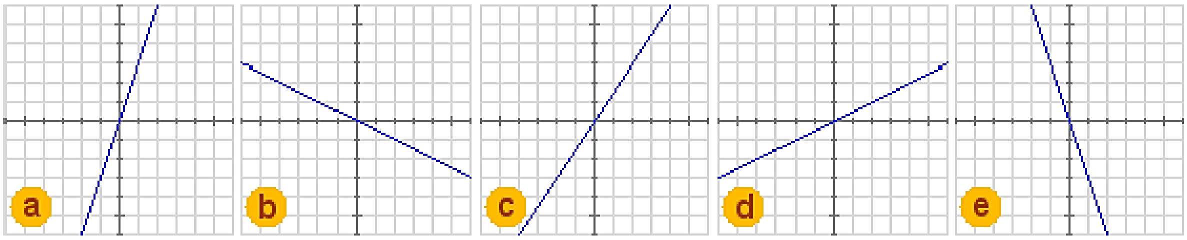
b) Calcula el valor de la pendiente y describe el crecimiento para cada una de las funciones.

c) Representa gráficamente las funciones lineales dadas.

13. Determina la ecuación de cada una de las rectas de la figura.



14. Observa las siguientes rectas, unas son crecientes y otras decrecientes, unas están más inclinadas y otras menos. A continuación relaciona cada gráfica con su ecuación y explica en qué se basa tu elección.



Función		**Gráfica**
y = - 3x		a
y = - 0,5x		b
y = 1,5x		c
y = 0,5x		d
y = 3x		e

15. Calcula y representa las siguientes rectas, sabiendo que:

a) Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto (-3, 2).

b) Pasa por los puntos A (-1, 5) y B (3, 7).

c) Pasa por el punto P (2, -3) y es paralela a la recta de ecuación y = -x + 7.

16. Halla la ecuación de las siguientes rectas:

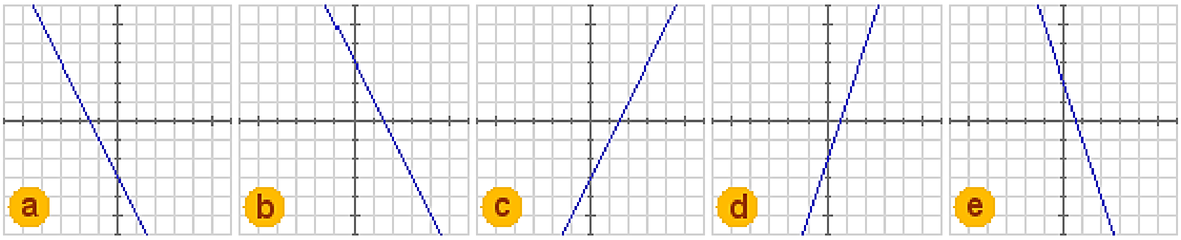
a) De la recta cuya pendiente es *a = 3* y cuya ordenada en el origen es *b = 2*.

b) De la recta cuya pendiente es *a = 2* y pasa por el punto *(2,7)*.

c) La paralela a la recta de ecuación *y = 4x – 2* y pasa por el punto *P(1,9)*.

d) De la recta que pasa por los puntos *A(1,5)* y *B(3,1)*.

17. Observa las siguientes rectas y asocia cada ecuación con su gráfica. Explica por qué.



Función		Gráfica
y = 3x – 2		a
y = - 3x + 2		b
y = - 2x – 3		c
y = 2x – 3		d
y = - 2x + 3		e

18. En su taxi Juan cobra las siguientes tarifas: 1,5€ por bajada de bandera y 40 céntimos por Km recorrido.

a) Obtén la expresión del precio *P* del viaje en función del número *x* de kilómetros recorridos.

b) ¿Cuál será el coste el precio del viaje si el cuentakilómetros marca 20 Km?

c) Representa gráficamente la función que representa el precio del viaje.

19. Para invitar a un concierto a sus amigos, Juan tiene dos posibilidades:

a) Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de 18 € y pagar las entradas a 7 € cada una.

b) Pagar cada entrada a 10 €.

Sea *x* el número de invitados de Juan. Obtener en función de *x* el precio a pagar en los dos casos.

Al final, Juan se presenta al concierto con 7 amigos. ¿Qué opción le salió más barata?

20. En la factura de la luz encontramos un ejemplo de función afín. En ella el importe sin impuestos, es el resultado de sumar una cantidad fija y una cantidad variable proporcional al consumo. Si el precio del KWh es 0,11473€ y la cuota fija por potencia contratada es de 5,82 euros, calcula la función que nos permita calcular el importe sin impuestos. Determina el precio de la factura (sin impuestos) para un consumo de 470 KWh.

21. El nivel del agua en un embalse es de 200 m, al abrir las compuertas desciende a razón de 10 m por minuto. Escribe la fórmula de la función que refleje el nivel del agua en función del tiempo transcurrido. ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el embalse?

22. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

a) Calcula su vértice.

b) Calcula los puntos de corte con el eje X.

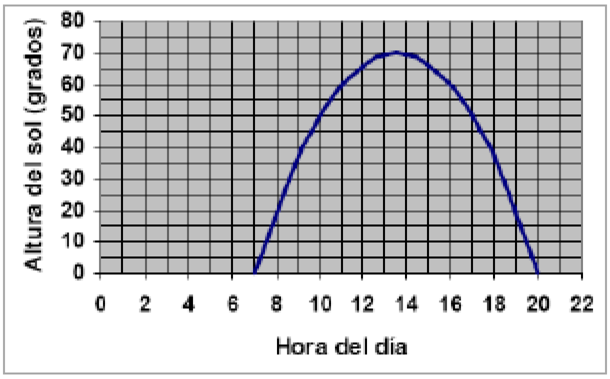
c) Calcula el punto de corte con el eje Y.

d) Representa gráficamente la función.

23. Dadas las siguientes funciones cuadráticas, determina el vértice de la gráfica asociada, sus puntos de corte con el eje X y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = x^2 + x - 6$; b) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$; c) $f(x) = x^2 - 4$.

24. La gráfica muestra la altura del sol sobre el horizonte, expresada en grados, a lo largo de un cierto día.



a) ¿A qué hora sale el sol? ¿A qué hora se pone?

b) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función?

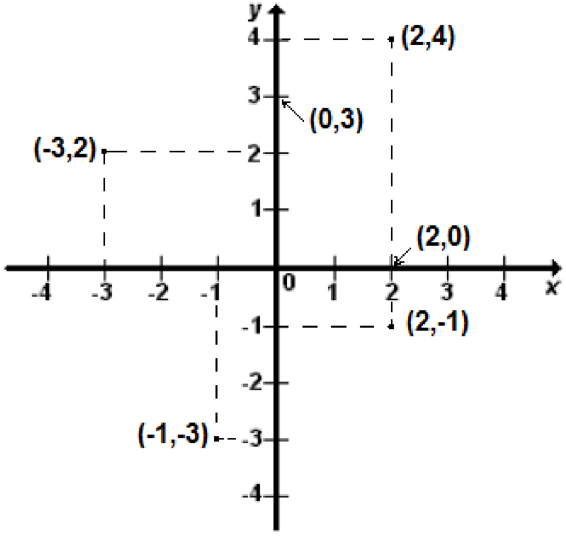
c) ¿A qué hora tiene el sol la máxima altura?

d) ¿Cuántas horas de luz hubo ese día?

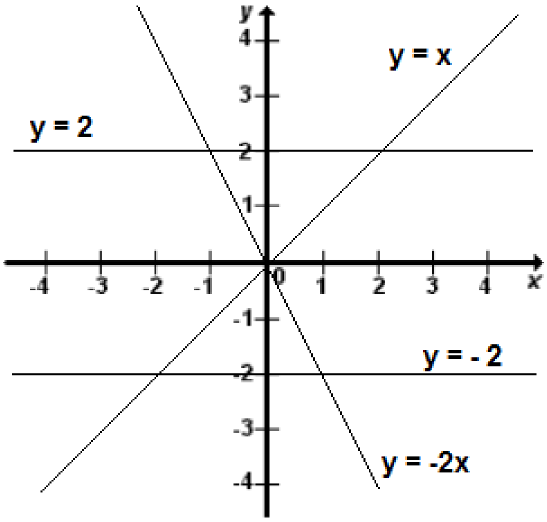
25. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 12 m/s, la altura sobre el suelo viene dada por $y = 12x - 5x^2$. Calcula la altura máxima que alcanza.

SOLUCIONES

1. **La representación de los puntos sería la siguiente:**



2. **Soluciones**:



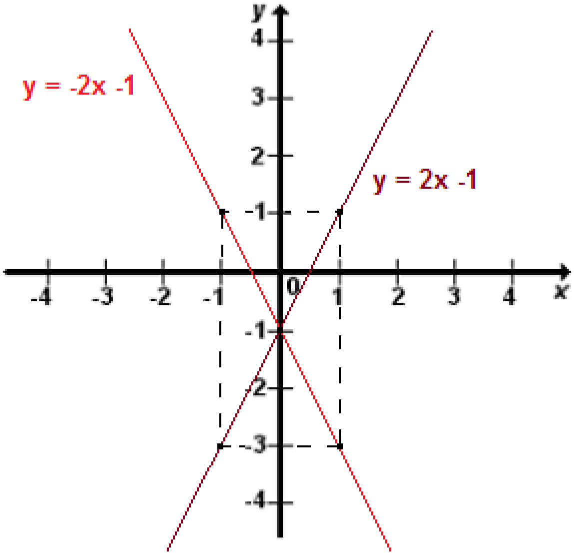
3. **Soluciones**:

y = 2x - 1

x	y
0	-1
1	1
-1	-3

y = -2x - 1

x	y
0	-1
1	-3
-1	1

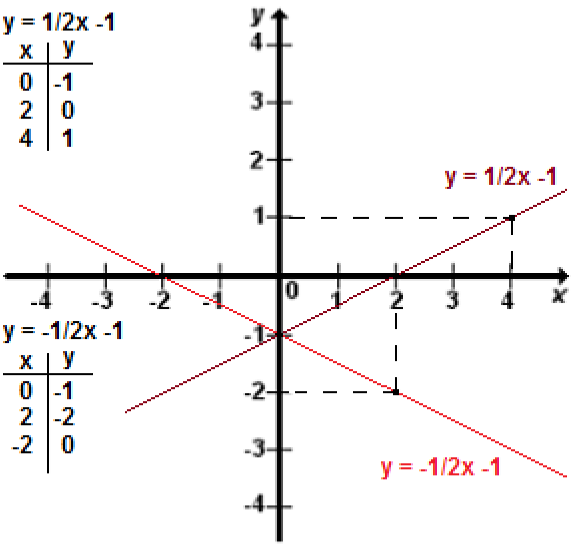


y = 1/2x -1

x	y
0	-1
2	0
4	1

y = -1/2x -1

x	y
0	-1
2	-2
-2	0



4. Soluciones:

a) $3x^2 - 24 = 0$

Despejamos x^2: $3x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 24 / 3 \rightarrow x^2 = 8$

Extraemos la raíz cuadrad de 8. Como 8 es positivo tenemos dos soluciones:

$$x = \sqrt{8} = \begin{cases} x_1 = +\sqrt{8} \\ x_2 = -\sqrt{8} \end{cases}$$

b) $6x^2 + 12 = 0$

Despejamos x^2: $6x^2 = -12 \rightarrow x^2 = -12 / 6 \rightarrow x^2 = -2$

Al intentar extraer la raíz cuadrada de – 2, observamos que no podemos hacerlo porque – 2 es negativo: $x = \sqrt{-2}$ no existe pues no hay ningún número real cuyo cuadrado sea – 2)

Así pues, en este caso la ecuación no tiene soluciones reales.

c) $3x^2 - 18x = 0$

Sacamos factor común a x: $x \cdot (3x - 18) = 0$

Una solución es $x_1 = 0$. La otra se obtiene de igualar a cero el factor $3x - 18$:

$$x(3x-18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x - 18 = 0 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \dfrac{18}{3} \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

5. Soluciones:

a) $$x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Esta ecuación **tiene dos soluciones** ya que el discriminante es un número positivo ($\Delta > 0$).

b)

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-10 \pm 0}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Esta ecuación **tiene sólo una solución**, ya que el discriminante es igual a cero ($\Delta = 0$). Diremos que es una solución doble.

c) $$2x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

Esta ecuación **no tiene soluciones**, ya que el discriminante es un número negativo ($\Delta < 0$).

6. Soluciones:

a) La gráfica **si es una función**. Para que una gráfica se corresponda con una función, cada valor de la variable independiente ha de tener como máximo una sola imagen.

b) La gráfica **no es una función**, ya que para cada valor de la variable independiente ésta puede tener más de una imagen.

c) La gráfica **si es una función**, ya que para cada valor de la variable independiente ésta solo tiene una imagen.

d) La gráfica **no es una función**, ya que para cada valor de la variable independiente ésta puede tener más de una imagen.

7. Soluciones:

a) $f(0) = -24; f(-4) = -48.$

b) $f(0) = -5/3; f(-8) = 18/19.$

c) $f(0) = -4; f(-3) = -40.$

d) $f(-1) = 13; f(2) = 11/8.$

e) $f(-3) = -4; f(4) = -11; f(0) = 5.$

f) $f(-5) = 65, f(-1/3) = -1/3.$

8. Soluciones:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R} - \{3\}$

d) $\mathbb{R} - \{-6\}$

e) $[6,5; +\infty)$

f) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

g) $\mathbb{R}$

h) $[14, +\infty)$

i) $[-6, +\infty)$

j) $(-\infty, 5]$

9. Soluciones:

a) Continua; b) Discontinua; c) Discontinua; d) Discontinua.

10. Soluciones:

a) Su valor en los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

Para $x = -2 \rightarrow \boldsymbol{y = 2}$; para $x = 0 \rightarrow \boldsymbol{y = 4,5}$; para $x = 3 \rightarrow \boldsymbol{y = 7}$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

<u>Crecimiento</u>: **(-10, -7) U (- 3, 3)**.

<u>Decrecimiento</u>: **(- ∞, 10) U (- 7, - 3) U (3, +∞)**.

c) Los valores de x en los que se alcanzan máximos o mínimos relativos.

Mínimos relativos en $\boldsymbol{x = -10}$ y $\boldsymbol{x = -3}$. *Máximos relativos* en $\boldsymbol{x = -7}$ y $\boldsymbol{x = 3}$. Observa que los puntos en los que se alcanza un *mínimo relativo* son *(-10,3)* y *(- 3,1,5)* y los puntos en los que se alcanza un *máximo relativo* son *(-7,5)* y *(3,7)*.

11. Soluciones:

a) Crece en $(-\infty, 3)$, decrece en $(3, +\infty)$ y máximo absoluto en el punto (3, 1).

b) Decrece en $(-\infty, -3)$, crece $(-3, -1)$ y mínimo absoluto en el punto (-3, -3).

c) Crece en $(-\infty, 3)$, decrece en $(3, +\infty)$ y máximo absoluto en (3, 2).

d) Decrece en $(-\infty, -2)$, crece en $(-2, +\infty)$ y mínimo absoluto en (-2, 1).

12. Soluciones:

a) Lineal

b) No lineal

c) No lineal

d) Lineal.

13. Soluciones:

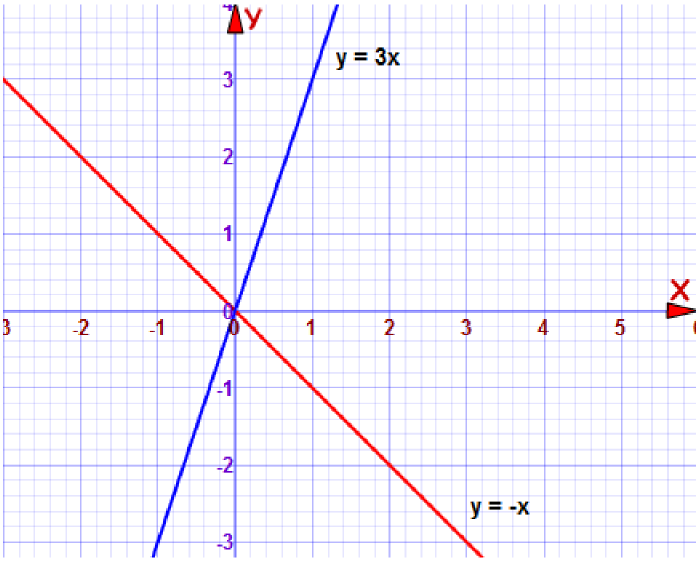
a) Valores de las funciones

x:	-2	0	2
f(x):	-6	0	6

x:	-2	0	2
f(x):	2	0	-2

b) *f(x) = 3x* → *a = 3*, creciente; *f(x)* = - *x* → *a* = *-1*, decreciente.

c) Gráficas.



14. Solución:

Todas las ecuaciones de cada una de las gráficas pasan por el origen, por tanto son funciones lineales, que tendrán una ecuación del tipo: *y* = *ax*. Para calcular la ecuación de cada una de las gráficas, tan solo tendremos que calcular el valor de la pendiente (*a*) de cada una de las rectas. Para ello, tan solo necesitamos conocer un punto *P* de cada recta.

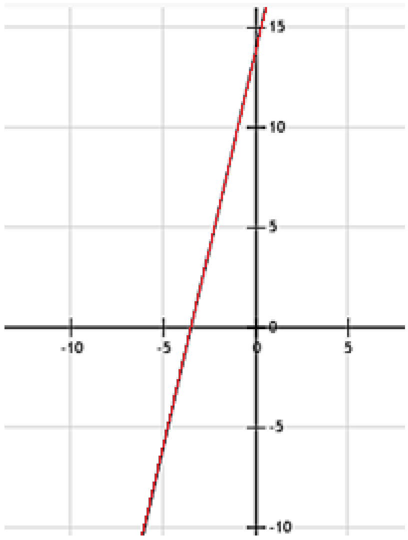
- *Recta 1* (r_1): Un punto que pertenece a esta recta es el punto *A (-1,3)*. Por tanto, la pendiente valdrá: ***a*** = *y/x* = *3/-1* = ***- 3***. Y la ecuación de la recta será: ***y = - 3x***.
- *Recta 2* (r_2): Un punto que pertenece a esta recta es el punto *B (4,3)*. Por tanto, la pendiente valdrá: ***a*** = *y/x* = ***3/4***. Y la ecuación de la recta será: $\boldsymbol{y = 3/4\,x}$.
- *Recta 3* (r_3): Un punto que pertenece a esta recta es el punto C (-1,3). Por tanto, la pendiente valdrá: ***a*** = *y/x* = ***1/7***. Y la ecuación de la recta será: $\boldsymbol{y = 1/7\,x}$.

15. Soluciones:

- La recta ***y = - 3x*** es decreciente al ser la pendiente negativa, y como el valor de la misma está alejado de cero, será una recta muy inclinada como la de la **gráfica e**.
- La recta ***y = - 0,5x*** es decreciente al ser la pendiente negativa, y como el valor de la misma está próximo a cero, será una recta poco inclinada como la de la **gráfica b**.

- La recta ***y = 1,5x*** es creciente al ser la pendiente positiva, y como el valor de la misma no está cercano a cero, será una recta algo inclinada como la de la **gráfica c**.
- La recta ***y = 0,5x*** es creciente al ser la pendiente positiva, y como el valor de la misma está próximo a cero, será una recta poco inclinada como la de la **gráfica d**.
- La recta ***y = 3x*** es creciente al ser la pendiente positiva, y como el valor de la misma está alejado de cero, será una recta muy inclinada como la de la **gráfica a**.

16. Soluciones:



a) La ecuación de una recta es: *y = ax + b*

Si la pendiente vale 4 → ***a = 4***. Como además tiene que pasar por el punto *(-3, 2)*, se cumplirá: *2 = 4· (-3) + b* → ***b = 14***.

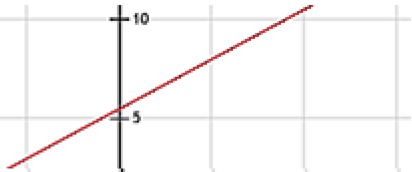
Por tanto, la recta que hay que representar es:

y = 4x +14.

b) Como la recta pasa por los puntos *A (-1, 5) y B (3, 7)*, podremos calcular con estos datos su pendiente, *a*, y posteriormente su punto de corte con el eje Y (*b*).

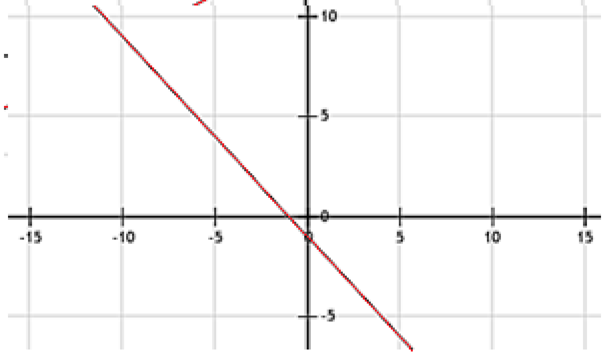
$$\boldsymbol{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-7}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Ahora que sabemos su pendiente podemos calcular el punto de corte con el eje Y con cualquiera de los puntos que pertenecen a la recta. Por ejemplo, si cogemos el punto A



5 = (1/2) ·(-1) + b → ***b*** *= 5 + 1/2 =* ***11/2***

Por tanto, la recta que hay que representar es: ***y = (1/2)x + 11/2***.



c) Si la recta es paralela a la recta de ecuación *y = - x + 7*, tendrá la misma pendiente, es decir, ***a = -1***. Si además debe pasar por el punto *P (2, -3)*, con este dato puedo calcular el punto de corte con el eje Y (*b*).

-3 = -1 ·2 + b → ***b = -1***

Por tanto, la recta es: ***y = –x – 1***.

17. Soluciones:

a) *y = 3x + 2.*

b) Si se conoce la pendiente, *a*, de una recta y un punto de la misma (x_0, y_0), la ecuación de la recta puede escribirse así: $y = y_0 + a\cdot(x - x_0)$. Dado que la pendiente es *a = 2* y pasa por el punto (2,7), la ecuación será: *y = 7 + 2·(x – 2)* → *y = 7 + 2x – 4* → ***y = 2x + 3***.

c) Como la recta es paralela a la recta de ecuación *y = 4x – 2*, tendrá la misma pendiente, es decir, *a = 4*. Y como pasa por el punto *P(1,9)*, su ecuación la podremos calcular con la fórmula: $y = y_0 + a\cdot(x - x_0)$. Por tanto, la ecuación será: *y = 9 + 4·(x – 1)* → ***y = 4x + 5***.

d) Como la recta pasa por los puntos *A(1,5)* y *B(3,1)*, su pendiente la podremos calcular mediante esta fórmula:

$$\boldsymbol{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Una vez calculada la pendiente, la ecuación de la recta la podemos calcular mediante la fórmula, $y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$ y uno de los puntos anteriores: $y = 1 - 2 \cdot (x - 3) \rightarrow$ ***y = - 2x + 7***.

18. Soluciones:

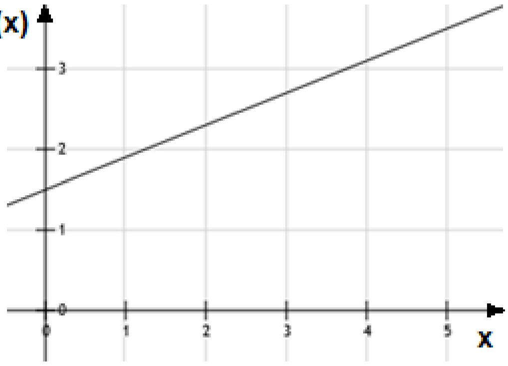
- La recta ***y = 3x – 2*** es creciente, muy inclinada y además corta al eje Y en la ordenada – 2. Por tanto, debe ser la **gráfica d**.
- La recta ***y = - 3x + 2*** es decreciente, muy inclinada y además corta al eje Y en la ordenada 2. Por tanto, debe ser la **gráfica e**.
- La recta ***y = - 2x – 3*** es decreciente, inclinada y además corta al eje Y en la ordenada – 3. Por tanto, debe ser la **gráfica a**.
- La recta ***y = 2x – 3*** es creciente, inclinada y además corta al eje Y en la ordenada – 3. Por tanto, debe ser la **gráfica c**.
- La recta ***y = - 2x + 3*** es decreciente, inclinada y además corta al eje Y en la ordenada 3. Por tanto, debe ser la **gráfica b**.

19. Soluciones:

a) ***P(x) = 0,4x + 1,5***

b) *Para x = 20 →* ***P(20)*** *= 0,4·20 + 1,5 =* ***9,5 €***

c) ***Gráfica*** *(a la derecha)*.



20. Soluciones:

P_A(x) = 7x + 18.

P_B(x) = 10x.

Para x = 7, $P_A(7) = 7 \cdot 7 + 18 = 67$ y *$P_B(7) = 10 \cdot 7 = 70$.* **La opción A es la más barata**.

21. Solución:

La fórmula de la función que permite calcular el importe a pagar según los KWh consumidos es:

y = 0,11473x + 5,82

A un consumo *x = 470 KWh*, le corresponde un importe de *y = 0,11473 · 470 + 5,82 =* ***59,74 €***.

22. Solución:

En este caso el valor fijo o inicial de la función es 200 y el factor variable es proporcional a 10. Por tanto, la función que representa el nivel del agua en función del tiempo transcurrido es:

y = f(x) = 200 – 10x

Para hallar el tiempo que tarda en vaciarse completamente el embalse, debemos igualar el valor de la función que representa el nivel del agua a cero.

y = 0 → 200 – 10x = 0 → 10x = 200 → ***x*** *= 200/10 =* ***20 minutos***.

23. Soluciones:

a) El vértice *V* tiene de coordenadas (x_V, y_V), donde

$$\boldsymbol{x_V} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = \mathbf{2} \rightarrow \boldsymbol{y_V} = f(x_V) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = \mathbf{-1}$$

Las coordenadas del vértice son (2,-1).

b) Los puntos de corte de la parábola con el eje X son las soluciones de la ecuación:

x^2 - 4x + 3 = 0

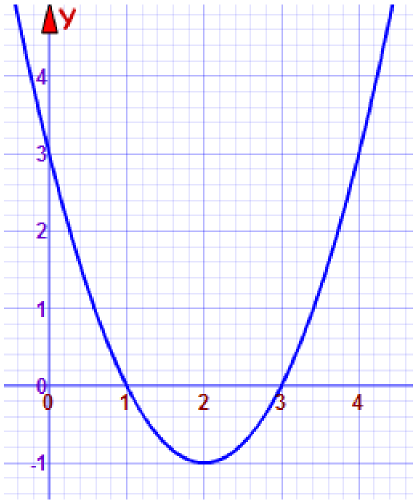
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

Puntos de corte: ***(1,0)*** y ***(3,0)***.

c) El punto de corte con el eje Y lo obtenemos al calcular:

f(0) = 02 – 4·0 + 3 = 3 → Punto de corte: ***(0,3)***.

d) Gráfica (a la derecha).



24. Soluciones:

a) El vértice *V* tiene de coordenadas (x_V, y_V), donde

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \rightarrow y_V = f(x_V) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4} = -6{,}25$$

Las coordenadas del vértice son ***(-1/2,-6,25)***.

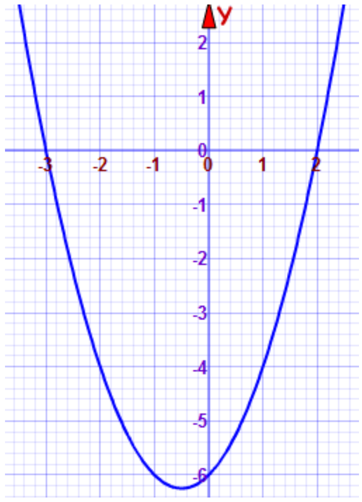
Calculamos las soluciones de la ecuación: *x^2 + x - 6 = 0*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = -3} \end{matrix}$$

Puntos de corte con el eje X: ***(2,0)*** y ***(-3,0)***.

Punto de corte con el eje Y: *f(0) = - 6* → ***(0,-6)***.

Gráfica (a la derecha).



b) El vértice *V* tiene de coordenadas (x_V, y_V), donde

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5 \rightarrow y_V = f(x_V) = -2 \cdot (1{,}5)^2 + 6 \cdot 1{,}5 - 4 = 0{,}5$$

Las coordenadas del vértice son ***(1,5,0,5)***.

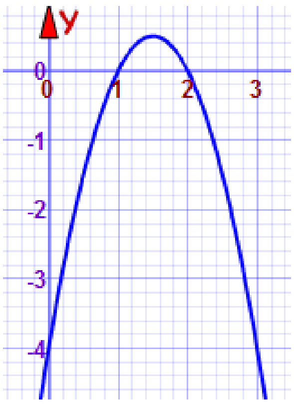
Calculamos las soluciones de la ecuación: *-2x^2 + 6x - 4 = 0*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-4} = \frac{-6 \pm 2}{-4} = \begin{matrix} \boldsymbol{x_1 = 1} \\ \boldsymbol{x_2 = 2} \end{matrix}$$

Puntos de corte con el eje X: ***(1,0)*** y ***(2,0)***.

Punto de corte con el eje Y: *f(0) = - 4* → ***(0,-4)***.

Gráfica (a la derecha).



c) El vértice tiene de coordenadas (x_v, y_v), donde

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{1} = 0 \rightarrow y_V = f(x_V) = (0)^2 - 4 = -4$$

Las coordenadas del vértice son ***(0,-4)***.

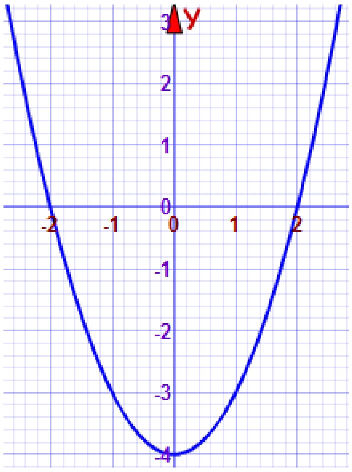
Calculamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Puntos de corte con el eje X: ***(2,0)*** y ***(-2,0)***.

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = -4 \rightarrow$ ***(0,-4)***.

Gráfica (a la derecha).



25. Soluciones:

a) El sol sale a las 7 de la mañana y se pone a las 8 de la tarde.

b) El intervalo de crecimiento es [7,13,5) y el intervalo de decrecimiento es (13,5,20].

c) A las 13:30 h.

d) Horas de luz = 20 – 7 = 13 horas.

26. Solución:

El vértice *V* de la parábola es el punto máximo. Por tanto, $x_v = -b/2a = -12/-10 = 1{,}2 \rightarrow y_v = f(1{,}2) = 7{,}2$. La **altura máxima** es de **7,2 m**.

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 10: ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO. ESTUDIO GASEOSO DE LA MATERIA.

TEMA 2. LA MATERIA. GASES.

1. LOS SISTEMAS MATERIALES.

Un **sistema material** es una porción de materia que se aísla física o mentalmente para facilitar su estudio experimental.

La arena de la playa, el agua del mar, el aire, la sal, el granito, el hielo, etc., son algunos de los muchos *sistemas materiales* que podemos observar en la naturaleza.

Muchos *sistemas materiales* están formados por dos o más sustancias diferentes que se distinguen a simple vista. Debido que su aspecto no es uniforme, decimos que son **sistemas materiales heterogéneos**

Otros presentan un aspecto uniforme, aunque pueden constituirlos una o más sustancias, y los llamamos **sistemas materiales homogéneos**.

2. LOS SISTEMAS MATERIALES HETEROGÉNEOS.

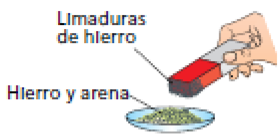
En un **sistema material heterogéneo**, o **mezcla heterogénea**, los componentes se distinguen a simple vista, porque se trata de sustancias diferentes, por ejemplo, agua y arena o de la misma sustancia en dos fases, por ejemplo, agua y hielo. Por tanto, estos sistemas no presentan la misma composición ni las mismas propiedades en todos sus puntos.

Podemos preparar una *mezcla heterogénea* agregando cantidades variables de cada una de las sustancias que formen parte de la mezcla .

Cada componente de una *mezcla heterogénea* conserva sus propiedades físicas características y esto facilita su separación. Los componentes de una mezcla heterogénea se separan mediante **procedimientos físicos**.

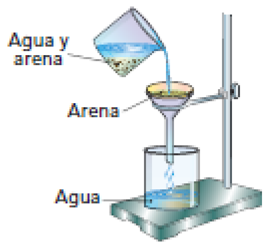
2.1. SEPARACIÓN MAGNÉTICA.

Este método se utiliza cuando uno de los componentes presenta propiedades magnéticas, es decir, es capaz de ser atraído por un imán. Se trata del procedimiento apropiado para separar una mezcla de arena y limaduras de hierro. Observa en el dibujo que el imán, cuando se aproxima a la mezcla, atrae las limaduras de hierro, que se separan así de la arena.

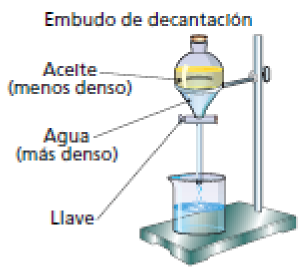


2.2. SEPARACIÓN POR FILTRACIÓN.

Se emplea para separar un sólido insoluble en un líquido, por ejemplo, agua y arena. Tras la filtración, el líquido queda en el vaso y el sólido en el filtro.



2.3. SEPARACIÓN POR DECANTACIÓN.



Este es el método adecuado para separar los componentes de una *mezcla heterogénea* formada por dos líquidos inmiscibles (que no se mezclan) y con diferente densidad, como aceite y agua. Para ello se vierte la mezcla en un *embudo de decantación* y se deja reposar. Después, se abre la llave y, cuando ha pasado el líquido más denso, se cierra para que el menos denso quede en el embudo.

3. LOS SISTEMAS MATERIALES HOMOGÉNEOS.

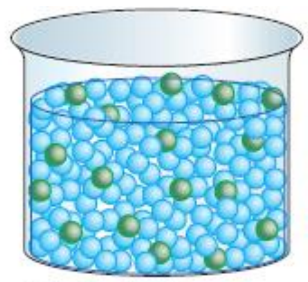
Un **sistema material homogéneo** tiene la misma composición química y las mismas propiedades en todos sus puntos. No obstante, puede estar constituido por uno o más componentes. En el primer caso se tratará de una **sustancia pura** y en el segundo, de una **disolución**.

Una **sustancia pura** mantiene siempre sus propiedades características (densidad, punto de fusión y ebullición…) constantes, lo cual no sucede en una *disolución*. Así, la densidad del agua pura es 1 000 kg/m^3 pero, por ejemplo, la de una disolución de sal en agua puede tener diferentes valores dependiendo de la cantidad de sal disuelta en un volumen determinado de agua. Ocurre lo mismo con el punto de ebullición: el del agua pura es constante, y el de las disoluciones aumenta a medida que transcurre el tiempo durante el que hierve.

Una **disolución** es un *sistema material homogéneo* formado por dos o más *sustancias puras* que pueden mezclarse en proporciones variables.

En general, el componente de una *disolución* que se encuentra en mayor proporción se denomina **disolvente**, y el que se encuentran en menor proporción se llaman **soluto**.

Por ejemplo, el *aire* es una disolución de gases en la que el *nitrógeno* (80 %) es el *disolvente* y el *oxígeno* (20 %) es el *soluto*.


Partículas de soluto dispersas en una disolución.

En una *disolución*, las partículas del disolvente dispersan a las del soluto, que quedan distribuidas entre las del disolvente. De ahí el aspecto homogéneo de la misma.

Dependiendo del número de componentes que entran a formar parte de una disolución, estas se clasifican en *binarias, ternarias, cuaternarias*, etc. Una *disolución acuosa* es aquella en la que el disolvente es el agua.

Una **aleación** es una *disolución sólida* formada por dos o más *elementos químicos*, uno de los cuales al menos, es metálico. Se obtiene por fusión y posterior solidificación de sus componentes. Algunas de las *aleaciones* más conocidas son *el acero, el bronce, el latón, el estaño y el oro blanco*.

3.1. CUANTIFICACIÓN DE LA MATERIA.

Para medir la **cantidad de sustancia** debemos partir que toda materia está formada por partículas, átomos o moléculas.

Las masas de los átomos son extremadamente pequeñas, por ejemplo, si tomásemos un átomo de oro veríamos que su masa es de $3{,}27.10^{-22}$ gramos. Es una masa pequeñísima, por lo que el gramo es una unidad demasiado grande para medirla. Por ello, las masas de los átomos se comparan con la masa de uno de ellos, al que llamaremos *átomo patrón*. Actualmente las masas de los átomos se comparan con el *isótopo de carbono-12*, al que se le asigna el valor de doce unidades. Por eso, se define la **unidad de masa atómica (u.m.a.)** como la doceava parte del isótopo de carbono-12. Lo que equivale a: ***1u = 1,66.10^-24^ g***.

La **masa atómica (M_a)** es la masa de un átomo expresada en *unidades de masa atómica (u)*. Así, la masa de un átomo de oro son *197 u*, que es un número más cómodo. El átomo más ligero, el hidrógeno, tiene una masa de *1,00794 u*. La *masa atómica* de un elemento se conoce también como **peso atómico**. La masa de un átomo de un elemento, la puedes encontrar en la tabla periódica.

La **masa molecular (M_m)** se obtiene sumando las *masas atómicas* de los elementos químicos presentes en la molécula teniendo en cuenta el número de átomos de cada elemento.

Por ejemplo, la *masa molecular del butano (C_4H_{10})* es:

M_m (C_4H_{10}) = 4 ·12,011 u + 10 ·1,00794 u = 58,12 u.

En Química no podemos trabajar a nivel atómico o molecular porque estamos hablando de masas al nivel de 10^{-24} g. En la práctica se necesita trabajar con cantidades enormes de átomos. Es, por ello, por lo que nace el concepto de *mol*.

Un **mol** es la cantidad de materia que contiene *$6{,}023\cdot10^{23}$* partículas. Entonces, un *mol de átomos* son *$6{,}023\cdot10^{23}$ átomos*, un *mol de moléculas* son *$6{,}023\cdot10^{23}$ moléculas*, un *mol de virus* son *$6{,}023\cdot10^{23}$ virus*, etc. El *mol* es la unidad en la que se mide la **cantidad de sustancia** en el S.I.

El número **$6{,}023\cdot10^{23}$** es el **número de Avogadro (N_A)** (*Amedeo Avogadro*, 1776-1856). Se escogió este número para que coincidencia numéricamente la masa de un átomo expresada en *u.m.a.* y la masa de *$6{,}023\cdot10^{23}$* átomos expresada en gramos.

Por ejemplo, 1 átomo de cobre (Cu) tiene una *masa atómica* de *63,55 u*. 1 mol de átomos de cobre son *$6{,}023\cdot10^{23}$ átomos de cobre*, que son a su vez*, 63,55 g* de cobre.

Es decir, como 1 átomo de cobre tiene una *masa atómica* de *63,55 u* y *1u = $1{,}66.10^{-24}$ g*, dicho átomo tendrá una masa en gramos igual a: *$63{,}55 \cdot 1{,}66.10^{-24} = 1{,}055 \cdot 10^{-22}$ g*. Y como un mol de cobre son *$6{,}023\cdot10^{23}$ átomos de cobre,* entonces: *$1{,}055 \cdot 10^{-22}$ g · $6{,}023\cdot10^{23}$ = 63,55 g* de cobre.

Lo mismo sucede con el agua (H_2O). El agua tiene una *masa molecular* de *18,015 u*. Por tanto, *1 mol de moléculas de agua (H_2O)* son *18,015 g de agua*.

La **masa molar (M)** es la masa de un mol de partículas, Se expresa en *g/mol*. Así se deduce que la *masa molar del cobre* es *63,55 g/mol*, la *masa molar del agua* es *18,015 g/mol*.

La *masa molar* se utiliza en cálculos de moles a partir de una cierta cantidad de sustancia. La relación entre la *masa de una sustancia*, la *masa molar* y el *mol* de esa sustancia es:

$$\boldsymbol{número\ de\ moles\ (n) = \frac{masa\ de\ sustancia\ (m)}{masa\ molar\ (M)}}$$

3.2. CONCENTRACIÓN DE UNA DISOLUCIÓN.

Cuando preparamos en el desayuno leche con cacao estamos preparando una **disolución**. Unos prefieren añadir una cucharada de cacao a la leche mientras que otros llegan a añadir hasta tres. En ambos casos los componentes de la *disolución* son los mismos, leche y cacao, pero ¿es la misma disolución? La respuesta es no, hay algo que las hace diferentes: la *concentración*.

Para preparar una *disolución* necesitamos conocer la cantidad de *soluto* que hay que agregar a una cantidad determinada de *disolvente*, es decir, su *concentración*.

La **concentración** de una *disolución* es la cantidad de soluto que hay disuelta en una determinada cantidad de disolvente o de disolución.

Cuando empezamos a añadir poco a poco cacao a la leche al principio se disuelve muy bien, pero si seguimos añadiendo más, llega un momento que la leche no es capaz de disolver más cacao y este se va al fondo del vaso (precipita). Hemos llegado a la cantidad máxima de cacao que puede disolver la leche, la *solubilidad* del cacao en leche.

La **solubilidad** es la cantidad máxima de soluto que puede disolverse en una determinada cantidad de disolvente, a una temperatura dada. Según sea la *concentración* de una disolución se pueden clasificar como:

a) **Diluidas**, si tienen poca cantidad de soluto disuelto.
b) **Concentradas**, si tienen mucha cantidad de soluto disuelto.
c) **Saturadas**, si ya no se puede disolver más soluto en esa cantidad de disolvente (depende de la temperatura).
d) **Sobresaturadas**, cuando contienen más soluto del que corresponde a esa cantidad de disolvente. Se preparan modificando la temperatura.

La *solubilidad* de las sustancias depende de varios factores:

- **Del soluto y del disolvente**: hay solutos que se disuelven mejor que otros, como ocurre con las diferentes marcas de cacao, unas se disuelven mejor en leche que otras. O disolventes que disuelven mejor algunos solutos, como por ejemplo el agua disuelve mejor la sal que el aceite.
- **De la temperatura**: cuando el soluto es un sólido al aumentar la temperatura aumenta la solubilidad, esto lo vemos cuando utilizamos leche caliente que favorece la disolución del cacao. Pero si el soluto es un gas ocurre lo contrario, la temperatura hace que disminuya la solubilidad, pues favorece que los gases escapen de la disolución.

Existen diferentes formas de expresar la *concentración de una disolución*, cada una es adecuada en función del estado de agregación de las sustancias a combinar. Si combinamos un sólido con un líquido usaremos "**Tanto por ciento en masa**" o bien "**Concentración en masa**". Si lo que combinamos son dos líquidos, sus volúmenes son fáciles de medir y para ellos será más recomendable utilizar "**Tanto por ciento en volumen**".

3.2.1. CONCENTRACIÓN EN TANTO POR CIENTO EN MASA.

Si utilizamos como unidad de masa el gramo (g), el **tanto por ciento en masa** de un soluto en una disolución será la masa del soluto (g) disuelta en 100 g de disolución.

$$\% \, \boldsymbol{masa\ del\ soluto} = \frac{\boldsymbol{masa\ del\ soluto\ (g)}}{\boldsymbol{masa\ de\ la\ disoluci\acute{o}n\ (g)}} \cdot \mathbf{100}$$

Por ser un porcentaje, el resultado no tiene unidades. Esta forma de expresar la concentración es habitual para indicar la riqueza de cada componente en una *aleación* de metales o en otras mezclas de sustancias sólidas.

<u>Ejemplo</u>: Un joyero prepara una aleación de oro y plata con 18 g de oro y 6 g de plata. Halla el tanto por ciento en masa de oro y plata en la aleación.

Masa de disolución (aleación) = 18 g de oro + 6 g de plata = 24 g

$$\% \, Oro = \frac{18\ g}{24\ g} \cdot 100 = 75\% \, ; \% \, Plata = \frac{6\ g}{24\ g} \cdot 100 = 25\%$$

3.2.2. CONCENTRACIÓN EN MASA.

La **concentración en masa** nos informa acerca de la masa de soluto disuelta en cada unidad de volumen de disolución. Aunque la concentración en masa debería expresarse en kg/m^3, es más frecuente hacerlo en g/cm^3 o en g/L.

$$\boldsymbol{Concentraci\acute{o}n\ en\ masa\ (C)} = \frac{\boldsymbol{Masa\ del\ soluto}}{\boldsymbol{Volumen\ de\ disoluci\acute{o}n}}$$

<u>Ejemplo</u>: Si en la etiqueta de una botella de agua mineral leemos 1,5g/L de sales, significa que cada litro de agua contiene 1,5 gramos de sales.

3.2.3. CONCENTRACIÓN EN TANTO POR CIENTO EN VOLUMEN.

El **tanto por ciento en volumen** de un soluto es el *número de unidades de volumen del soluto* disuelto en *100 unidades de volumen de disolución*.

El *volumen de disolución* es la suma del *volumen de disolvente* y los *volúmenes de todos los solutos* presentes en la disolución. Por ser un porcentaje, el resultado carece de unidades.

$$\% \, \boldsymbol{Volumen\ del\ soluto} = \frac{\boldsymbol{Volumen\ del\ soluto}}{\boldsymbol{Volumen\ de\ disoluci\acute{o}n}} \cdot \mathbf{100}$$

<u>Ejemplo</u>: Si en la etiqueta de un vino leemos 14% en volumen de alcohol, significa que 100 ml de vino contienen 14 ml de alcohol.

3.2.4. CONCENTRACIÓN MOLAR O MOLARIDAD.

La **Molaridad (M)** o **Concentración Molar** es el número de moles de soluto que están disueltos en un determinado volumen. Se representa generalmente con la letra M. Es una medida de concentración muy utilizada en química y bioquímica, expresada como mol/L, aunque en realidad sus unidades del S.I. son mol/m^3 (milimolar).

$$\boldsymbol{Molaridad\ (M)} = \frac{\boldsymbol{n^{o}\ de\ moles}}{\boldsymbol{Volumen\ disoluci\acute{o}n}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{V}}$$

Como el volumen (V) varía con la temperatura (T) mediante la expansión y la contracción, la *molaridad (M)* también va a variar con la temperatura (T).

<u>Ejemplo</u>: Calcular la molaridad de una disolución que contiene $2{,}07 \cdot 10^{-2}$ moles de soluto en 50 ml de disolvente:

$$M = \frac{n}{V} = \frac{2{,}07 \cdot 10^{-2}\, moles}{0{,}05\, litros} = 0{,}04\, molar$$

4. ESTUDIO DEL ESTADO GASEOSO. LEYES DE LOS GASES.

El *volumen* de una determinada masa de gas depende de la *presión* y la *temperatura* a la que se encuentre. Estas tres variables están relacionadas entre sí y definen el estado de un gas: se llaman **variables de estado**.

La **presión** es una magnitud que mide la relación entre la fuerza realizada sobre un objeto y la superficie sobre la que se realiza: **P = F/S**. La unidad en el S. I., es el **pascal (Pa)**, pero es muy habitual medirla en **atmósferas (atm)**. Equivalencias: *1 atm = 760 mm Hg = 101325 Pa*.

El aire que hay en la atmósfera también ejerce presión sobre la Tierra y todos los objetos y seres que hay sobre ella. El peso del aire sobre la superficie de los cuerpos que están en contacto con ella es la **presión atmosférica**. La presión normal es de *1 atmósfera (1 atm)*.

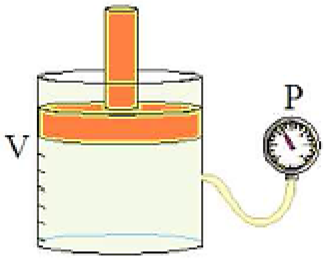
La presión de los gases se mide con aparatos que se llaman *manómetros*. Los aparatos que miden la presión atmosférica se llaman *barómetros*.

La **temperatura** es una magnitud que está relacionada con el movimiento de las partículas. Si la temperatura aumenta las partículas que forman las sustancias se mueven a mayor velocidad. Cuando calentamos una sustancia observamos que sube la temperatura.

Como ya hemos comentado, los gases se expanden por el recipiente en que están. Así que el **volumen** del gas es el volumen del recipiente que lo contiene.

4.1. LEYES DE LOS GASES.

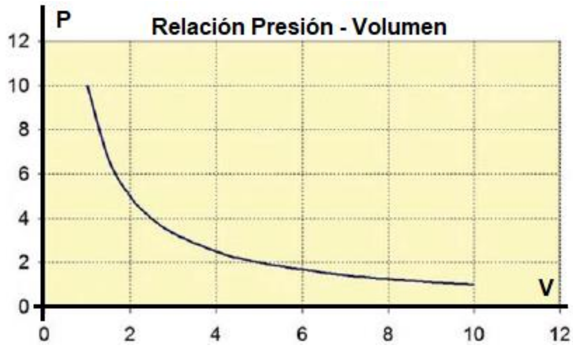
La *presión*, el *volumen* y la *temperatura* de un gas pueden cambiar, aumentando o disminuyendo, pero estos cambios están relacionados entre sí. Vamos a estudiarlos ahora, para ahondar en el conocimiento de los gases.



<u>LEY DE BOYLE - MARIOTTE</u>

Si introducimos un gas en un recipiente hermético con un émbolo móvil conectado a un manómetro, manteniendo la temperatura constante, se observa que a medida que vamos empujando el émbolo, el volumen que ocupa el gas disminuye, y que cada vez hemos de realizar mayor fuerza sobre la misma superficie del émbolo, lo que implica que la presión ha aumentado.

Si fuésemos anotando el volumen que ocupa el gas y la presión que indica el manómetro en todo momento, obtendríamos una gráfica similar a la siguiente. Vemos que cuanto mayor es la presión menor es el volumen. Ambas magnitudes son inversamente proporcionales.



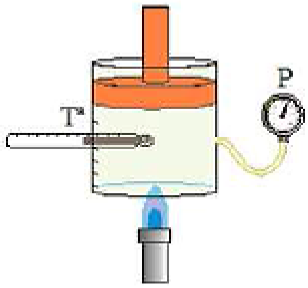
Se puede comprobar que el producto de la presión por el volumen siempre da el mismo resultado, por lo que podemos decir que es constante. Es decir, $\boldsymbol{P \cdot V = cte.} \rightarrow \boldsymbol{P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2}$

Esto se conoce como **ley de Boyle - Mariotte**, en honor a los químicos inglés y francés que lo descubrieron.

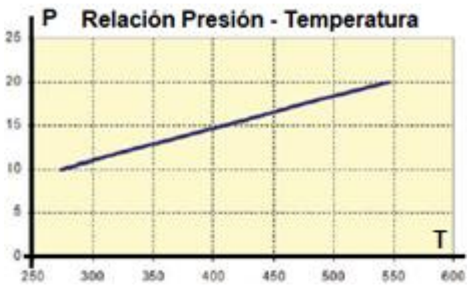
<u>Ejemplo:</u> Los gases en el pistón de un motor ocupan 1,05 litros estando a 1 atm de presión. El émbolo comprime los gases hasta reducir su volumen a la cuarta parte del inicial. ¿Cuál es la presión de los gases ahora si no varió la temperatura?

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \rightarrow 1 \cdot 1{,}05 = P_2 \cdot \frac{1{,}05}{4} \rightarrow \boldsymbol{P_2} = \frac{4 \cdot 1{,}05}{1{,}05} = \boldsymbol{4\ atm}$$

<u>LEY DE GAY - LUSSAC</u>



Si se dispone de un recipiente de volumen fijo con una cantidad concreta de gas, se observa que al calentar el gas, la presión aumenta proporcionalmente a la temperatura absoluta del gas. Si representamos ambas magnitudes en una gráfica, veremos que esta relación es una recta.



De la gráfica deducimos que la presión es directamente proporcional a la temperatura, lo que se conoce como **ley de Gay-Lussac**.

$$\boldsymbol{\frac{P}{T} = cte.} \rightarrow \boldsymbol{\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}}$$

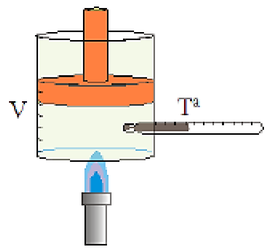
Para usar esta fórmula, recuerde que la temperatura siempre hay que ponerla en grados *Kelvin*.

<u>Ejemplo</u>: El gas de un depósito está a 20 ºC y tiene 3 atm de presión. Lo dejamos al sol, y su temperatura sube a 60 ºC. ¿Cuál es ahora la presión del gas en el depósito?

Primero pasamos las temperaturas a Kelvin: $T_1 = 20 + 273 = 293$ K; $T_2 = 60 + 273 = 333$ K.

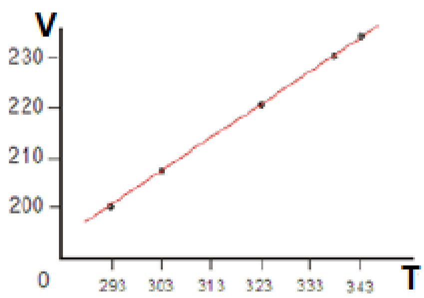
$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \rightarrow \boldsymbol{P_2} = \frac{P_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{3 \cdot 333}{293} = \boldsymbol{3{,}41\ atm}$$

<u>LEY DE CHARLES</u>



También se puede observar que si se calienta un gas que está en un recipiente de volumen variable a presión constante, éste varía proporcionalmente al cambio de temperatura. Es decir, $\boldsymbol{V/T = cte}$. Esto es lo que se conoce como **Ley de Charles**.

$$\boldsymbol{\frac{V}{T} = cte.} \rightarrow \boldsymbol{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$$



Si representamos gráficamente la relación entre el volumen y la temperatura en cada instante, vemos que es una recta. Un experimento que nos permite comprobar esta ley, consiste en colocar un globo deshinchado al sol, veremos que pasado un rato se hincha a ojos vista.

Ejemplo: Un cilindro con un pistón se llena con 25 ml de gasolina gaseosa a 25 ºC. ¿Cuánto ocupará, a presión constante, la gasolina cuando esté a 75 ºC?

Primero pasamos las temperaturas a Kelvin: T_1 = 25 + 273 = 298 K; T_2 = 75 + 273 = 348 K.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{25 \cdot 348}{298} = 29{,}19\ ml$$

LEY GENERAL DE LOS GASES PERFECTOS

Las leyes de *Boyle-Mariotte*, de *Gay-Lussac* y de *Charles* y relacionan la *presión*, el *volumen* y la *temperatura* de un gas de dos en dos, por parejas. Sin embargo, es posible deducir una ley que las incluya a las tres: la **ley general de los gases perfectos**.

$$\boldsymbol{\frac{P \cdot V}{T} = cte. \rightarrow \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}}$$

Evidentemente la cantidad de gas influirá en sus propiedades. La ecuación que relaciona las propiedades de los gases con la cantidad de gas es la **ecuación de los gases ideales**:

P · V = n · R · T

En la que *n* es la cantidad de gas en *moles*, *R* es la constante universal cuyo valor es *0,08205 atm·l/mol·K*, y *P*, *V* y *T* son la presión, volumen y temperatura del gas medidas en atmósferas, litros y grados Kelvin, respectivamente.

Ejemplo 1: ¿Qué presión ejercerán 2 moles de gas si ocupan 10 l a una temperatura de 300 K? Dato: R = 0,08205 atm·l/mol·K.

Aplicando la ecuación de los gases ideales

$$P \cdot 10 = 2 \cdot 0{,}08205 \cdot 300 \rightarrow \boldsymbol{P} = \frac{2 \cdot 0{,}08205 \cdot 300}{10} = \boldsymbol{4{,}92\ atm}$$

Ejemplo 2: A una presión de 2026 mb y una temperatura de 0 ºC, un gas ocupa un volumen de 5 l. ¿Cuántos moles de gas hay presentes? Dato: 1 atm = 1,01325 bar.

Pasamos primeros de milibares a atmósferas: 2026 mb = 2,026 bar ≈ 2 atm. Y 0 ºC = 273 K

$$2 \cdot 5 = n \cdot 0{,}08205 \cdot 273 \rightarrow \boldsymbol{n} = \frac{2 \cdot 5}{0{,}08205 \cdot 273} = \boldsymbol{0{,}45\ moles}$$

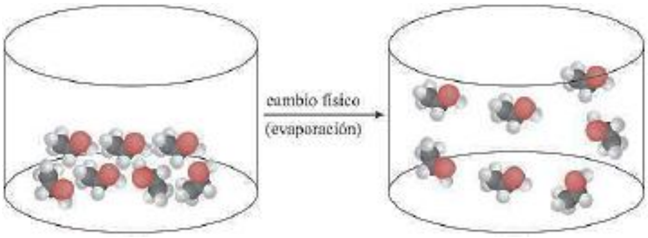
5. CAMBIOS FÍSICOS Y QUÍMICOS.

La materia esta constituida por *átomos neutros* o por *iones*. Estos se unen para formar *moléculas* u otro tipo de agrupaciones que forman las **sustancias**. A veces estas *sustancias* se combinan unas con otras y sufren determinados *cambios* o *fenómenos*, que no todos son iguales.

En nuestra experiencia cotidiana observamos como al mezclar o calentar sustancias, se producen **cambios** en ellas. Dentro de estos *cambios* podemos encontrar algunos que no modifican la naturaleza de la sustancia original y en otros casos, el cambio es mucho más dramático: el resultado resulta ser una sustancia absolutamente diferente a la que teníamos al principio.

Cambios físicos

Consideremos las siguientes acciones: evaporar agua, romper en dos trozos una hoja de papel, disolver azúcar en la leche y machacar ajos en el mortero. Todas ellas son ejemplos de *cambios físicos*, porque las sustancias son las mismas antes y después de la acción realizada: el agua sigue siendo agua (las moléculas no cambian, sólo lo hace su disposición), el papel sigue siendo papel, etc. En un *cambio físico*, las moléculas no sufren cambios, son idénticas antes y después del cambio. Los *cambios de estado* son ejemplos de *cambios físicos*.

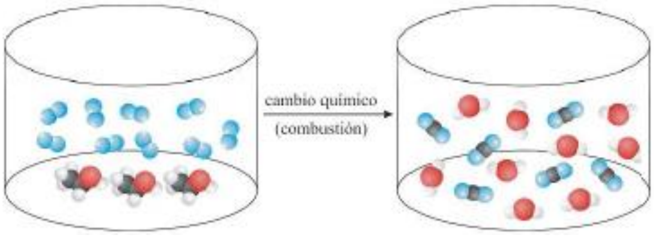


Un **cambio** o **fenómeno físico** es aquél que no altera las sustancias que intervienen en él.

__Cambios químicos__

Consideremos ahora estos otros cambios: quemar alcohol o papel, oxidarse el hierro, freír un huevo, elaborar vino a partir de la uva. Son todos ejemplos de *cambios químicos* o *reacciones químicas*, ya que las sustancias iniciales (alcohol, hierro, papel...) no son iguales que las finales. En un *cambio químico* o en una *reacción química* las moléculas no son las mismas antes que después.

Un **cambio** o **fenómeno químico** es aquél que altera la naturaleza de las sustancias, transformándolas en otras totalmente diferentes, que tienen propiedades distintas. Este proceso es una **reacción química**.



Las *sustancias iniciales* se llaman **reactivos** y las *finales* **productos**.

En todo *cambio químico* se produce la aparición de nuevas sustancias, que se pueden detectar por una serie de indicios, entre otros los siguientes:

- Variación de la coloración.
- Formación de precipitados sólidos en caso de reacciones en estado líquido.
- Desprendimiento de gases.
- Emisión o absorción de calor.

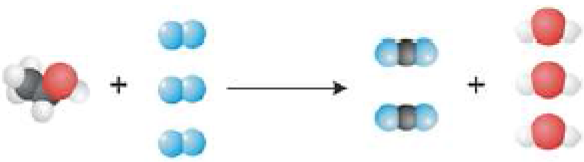
6. REACCIONES QUÍMICAS Y ECUACIONES QUÍMICAS.

6.1. REACCIONES QUÍMICAS.

Una **reacción química** es un *fenómeno químico* mediante el cual se obtienen, a partir de unas *sustancias iniciales* llamadas **reactivos**, otras *sustancias diferentes*, que se denominan **productos**.

Veamos con detalle lo que les ocurre a las moléculas de alcohol (CH_3 - CH_2OH) en un *cambio químico*, como la combustión (para ello es necesario que haya oxígeno):

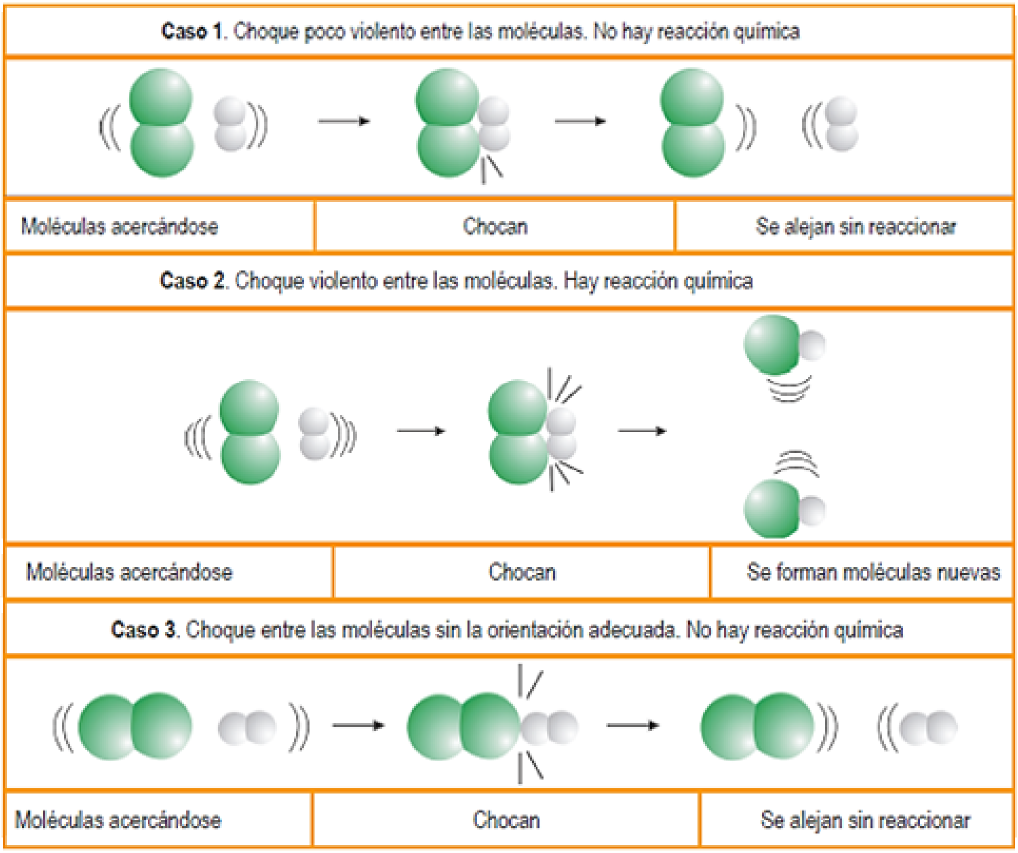
Esta *reacción química* de combustión del alcohol la representamos gráficamente así:



y con *ecuaciones químicas* así:

$$\mathbf{CH_3CH_2OH + 3\ O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + 3\ H_2O}$$

Las **ecuaciones químicas** son el modo de representar a las *reacciones químicas*.



Para que las moléculas reaccionen tienen que acercarse entre sí, más concretamente tienen que chocar las unas con las otras. Si el choque es suficientemente violento y la orientación espacial la adecuada, se pueden romper enlaces entre los átomos de los reactivos, separarse esos átomos y enlazarse de nuevo, pero con átomos diferentes, formando nuevas moléculas.

Fíjate en los dibujos anteriores, donde se representa la reacción: $F_2 + H_2 \rightarrow 2\ HF$

Por lo tanto, en esencia, una *reacción química* consiste en la ruptura de algunos de los enlaces (o todos) entre los átomos de los *reactivos* y la formación de enlaces nuevos que dan lugar a nuevas moléculas, los *productos*, que son sustancias completamente diferentes a los reactivos.

Cabe destacar que el factor clave en esta **teoría de las colisiones** es la *velocidad de las moléculas*, ya que si esta no es suficiente la reacción no tendrá lugar. Dado que esta velocidad está directamente relacionada con la *temperatura*, esto explica que para que algunas reacciones tengan lugar, será necesario el aporte de calor a las mismas.

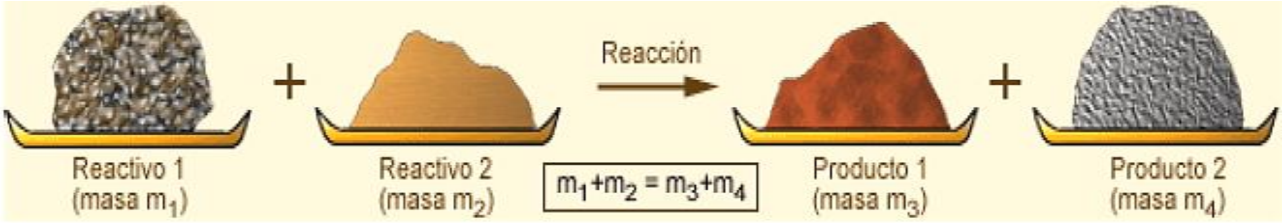
La energía mínima necesaria para que se rompan los enlaces se llama **energía de activación**.

6.2. LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.

En toda **reacción química** los **reactivos** son diferentes de los **productos** obtenidos, pero lo que no varía es el número de átomos presentes de cada uno de los elementos: se trata de una mera reordenación de los mismos.

La *masa de los reactivos* es la suma de la masa de los átomos que forman sus moléculas, y dado que los *productos* estarán formados por los mismos átomos, aunque organizados en moléculas distintas, deberán tener exactamente la misma masa.

Esto fue planteado por *A. Lavoisier* a finales del s. XVIII de esta forma, "*En cualquier sistema químicamente cerrado la masa de los productos es exactamente igual a la masa de los reactivos*" y se conoce como **ley de la conservación de la masa** (*Ley de Lavoisier*).



6.3. ECUACIONES QUÍMICAS.

La **ecuación química** es la representación simbólica de la *reacción química*. A la izquierda se ponen las fórmulas de los *reactivos* y a la derecha las de los *productos*, separados por una flecha. Por ejemplo:

$$NH_3\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow H_2O\,(l) + NO_2\,(g)$$

Entre paréntesis se pone el estado físico de la sustancia: *(g) = gas*; *(l) = líquido*; *(s) = sólido*; *(ac) = disuelto en agua*; *(↓) = precipitado sólido insoluble que se va al fondo del recipiente*.

El "**+**" se lee como "reacciona con" y la flecha "→" significa "produce".

6.3.1. AJUSTE DE UNA ECUACIÓN QUÍMICA.

La *ecuación química* tiene que reflejar que, en la reacción que representa, no se crea ni desaparece ningún átomo; tiene que haber los mismos átomos de cada elemento en los *reactivos* y en los *productos*. Por esto tenemos que **ajustar** las ecuaciones químicas. ¿Cómo se hace? Veamos un ejemplo.

<u>Método de tanteo</u>

La ecuación anterior, $NH_3\,(g) + O_2\,(g) \rightarrow H_2O\,(l) + NO_2\,(g)$ no está bien escrita, no está *ajustada*. Observamos que en los reactivos hay tres átomos de hidrógeno (*H*) y en los productos hay dos, y que en los reactivos hay dos átomos de oxígeno (*O*) y en los productos tres, y no puede ser así.

Para ajustar la ecuación y que corresponda con la realidad de lo que ocurre, tenemos que determinar cuántas moléculas de cada sustancia realmente reaccionan. Se puede hacer por aproximación (a veces no es fácil) hasta igualar el número de átomos en los dos miembros de la ecuación. En el caso de la ecuación anterior sería:

$$4\,NH_3\,(g) + 7\,O_2\,(g) \rightarrow 6\,H_2O\,(l) + 4\,NO_2\,(g)$$

Los números que ponemos delante de las fórmulas de cada sustancia se llaman **coeficientes estequiométricos** (el coeficiente 1 se omite), e indican el número de moléculas de cada uno de los *reactivos* que reaccionan y de cada *producto* que se forma. A la hora de ajustar, siempre se intentará que los *coeficientes estequiométricos* sean enteros y lo menores posibles, es decir, que no tengan divisores comunes.

Comprobamos que está bien ajustada: Para saber el número de átomos de cada elemento multiplicamos el coeficiente de cada compuesto por el subíndice y sumamos todos los átomos iguales de los reactivos e igual para los productos.

Átomos	Reactivos:	Productos
nitrógeno N	4.1=4	4.1=4
hidrógeno H	4.3=12	6.2=12
oxígeno O	7.2=14	6.1=6; 4.2=8; 6+8=14

Por lo tanto, en la reacción anterior, cuatro moléculas de amoníaco (NH_3) reaccionan con siete moléculas de O_2 para producir seis moléculas de agua H_2O y cuatro de NO_2.

Observaciones prácticas

- En el ajuste no se pueden cambiar los subíndices de las fórmulas, pues eso significaría variar las sustancias que intervienen en la reacción; no se puede hacer, por ejemplo, cambiar H_2O por H_3O ya que entonces, ¡no sería agua!
- Empiece ajustando los elementos que aparezcan en el menor número de moléculas. Por ejemplo, en la reacción anterior no empiece ajustando el oxígeno, ya que está presente en tres moléculas diferentes, mientras que el *N* y el *H* están solo en dos.
- Se empieza ajustando los elementos metálicos, luego los no metálicos, excepto O y H y finalmente el O y H.

Ajuste de una ecuación química: método matemático

Este método consiste básicamente en lo siguiente:

1. Asigna una letra a cada *coeficiente estequiométrico*. Conviene asignarlas por orden alfabético de izquierda a derecha.
2. Tomamos el primer elemento de la izquierda y planteamos la ecuación que representa el balance de átomos de dicho elemento:

   Nº de átomos del elemento en la izquierda = Nº de átomos del elemento en la derecha
3. Continuando por la izquierda de la reacción química, planteamos otra ecuación para el siguiente elemento diferente. De esta forma tendremos el balance de átomos de todos los elementos diferentes que existen en la reacción química.
4. Siempre tendremos una ecuación menos que incógnitas. En algún caso podríamos obtener más ecuaciones pero si nos fijamos bien veremos que algunas son equivalentes.
5. Asignamos el valor 1 a la letra (incógnita) que queramos.
6. Resolvemos el resto de las ecuaciones.

Ejemplo 1:

En la reacción de combustión de metano (CH_4), éste se combina con oxígeno molecular (O_2) del aire para formar dióxido de carbono (CO_2) y agua. (H_2O). La reacción sin ajustar será:

$$\boldsymbol{a} \cdot CH_4 + \boldsymbol{b} \cdot O_2 \rightarrow \boldsymbol{c} \cdot CO_2 + \boldsymbol{d} \cdot H_2O$$

En esta ecuación, las incógnitas son *a*, *b*, *c* y *d*, que son los denominados *coeficientes estequiométricos*. Para calcularlos, debe tenerse en cuenta la *ley de conservación de la materia*, por lo que la suma de los átomos cada elemento debe ser igual en los reactivos y en los productos de la reacción. En el ejemplo, para el elemento hidrógeno (*H*) hay $4 \cdot a$ átomos en los reactivos y $2 \cdot d$ átomos en los productos. De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones:

- Hidrógeno: $\boldsymbol{4 \cdot a = 2 \cdot d}$
- Oxígeno: $\boldsymbol{2 \cdot b = 2 \cdot c + d}$
- Carbono: $\boldsymbol{a = c}$

Obteniendo en este caso un sistema de ecuaciones indeterminado, con tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Para resolverlo, se asigna un valor a una de las variables, obteniendo así una cuarta ecuación, que no debe ser combinación lineal de las demás. Por ejemplo: $\boldsymbol{a = 1}$. Sustituyendo $a = 1$ en la primera ecuación del sistema de ecuaciones, se obtiene $\boldsymbol{d = 2}$. Sustituyendo $a = 1$ en la tercera ecuación, se obtiene $\boldsymbol{c = 1}$. Sustituyendo $c = 1$ y $d = 2$ en la segunda ecuación, se obtiene $\boldsymbol{b=2}$.

Sustituyendo los *coeficientes estequiométricos* en la ecuación de la reacción, se obtiene la ecuación ajustada de la reacción:

$$CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O$$

Ésta dice que 1 molécula de metano reacciona con 2 moléculas de oxígeno para dar 1 molécula de dióxido de carbono y 2 moléculas de agua.

Al fijar arbitrariamente un coeficiente e ir deduciendo los demás pueden obtenerse valores racionales no enteros. En este caso, se multiplican todos los coeficientes por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

<u>Ejemplo 2</u>:

Ajustar la reacción química: $Na_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow NaCl + BaSO_4$

$$\boldsymbol{a} \cdot Na_2SO_4 + \boldsymbol{b} \cdot BaCl_2 \rightarrow \boldsymbol{c} \cdot NaCl + \boldsymbol{d} \cdot BaSO_4$$

- Sodio (Na): $\boldsymbol{2a = c}$
- Azufre (S): $\boldsymbol{a = d}$
- Oxígeno (O): $\boldsymbol{4a = 4d}$
- Bario (Ba): $\boldsymbol{b = d}$
- Cloro (Cl): $\boldsymbol{2b = c}$

Si asignamos a la incógnita *d* del valor 1: $\boldsymbol{d = 1}$, tendremos

Como $a = d$ entonces $\boldsymbol{a = 1}$

Como $b = d$ entonces $\boldsymbol{b = 1}$

Como $2b = c$, sustituyendo $2 \cdot 1 = c$, es decir, $\boldsymbol{c = 2}$

La ecuación ajustada es la siguiente: $Na_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow 2\ NaCl + BaSO_4$

6.4. TIPOS DE REACCIONES QUÍMICAS.

Se conocen millones de reacciones químicas y cada día se descubren otras nuevas; sin embargo no todas tienen la misma importancia. Algunas son imprescindibles para la vida, otras son fundamentales en la industria química y farmacéutica, uno de los pilares en los que se basa el desarrollo social y tecnológico.

Reacciones de combinación o síntesis

En este tipo de reacciones, se combinan dos o más sustancias que pueden ser elementos o compuestos para formar un producto: $A + B \rightarrow AB$

Ejemplo: síntesis del amoniaco: $N_2 + 3\ H_2 \rightarrow 2\ NH_3$

Reacciones de descomposición

En una *reacción de descomposición*, una sola sustancia se descompone, produciendo dos o más sustancias distintas. A este tipo de reacciones se le puede considerar como el inverso de las *reacciones de combinación*. El material inicial debe ser un compuesto y los productos pueden ser elementos o compuestos. Generalmente se necesita calor para que ocurra la reacción (*reacciones endotérmicas* → se absorbe energía) Esto se indica en la reacción con este símbolo Δ, colocado encima de la flecha.

Ejemplo: $2\ H_2O_2 \rightarrow 2\ H_2O + O_2$

Reacciones de precipitación (disolución)

Son aquellas que dan como resultado la formación de un producto insoluble, llamado *precipitado*. El *precipitado* es un sólido insoluble que se forma por una reacción en disolución.

Ejemplo: $AgNO_3 + NaCl \rightarrow AgCl\ (s) + NaNO_3$

Reacciones de desplazamiento (sustitución)

En una *reacción de simple desplazamiento* un elemento reacciona con un compuesto y toma el lugar de uno de los elementos del compuesto, produciendo un elemento distinto y un compuesto también diferente.

Ejemplo: $Mg\ (s) + 2\ HCl\ (ac) \rightarrow MgCl_2\ (ac) + H_2\ (g)$

En una *reacción de doble desplazamiento*, dos compuestos intercambian parejas entre sí, para producir compuestos distintos.

Ejemplo: $CH_4 + Cl_2 \rightarrow CH_3Cl + HCl$

Reacción ácido - base (neutralización)

Un **ácido** en medio acuoso se separa aportando iones hidrógeno H^+ y una **base** en medio acuoso se separa produciendo iones hidróxido OH^-. Debido a esta formación de iones los *ácidos* y las *bases* en disolución conducen la corriente eléctrica.

Ejemplos: $HCl\ (ac) \rightarrow Cl^- + H^+$; $NaOH\ (ac) \rightarrow Na^+ + OH^-$.

Una *reacción de neutralización* es aquélla en la cual reacciona un *ácido* con una *base*. En la reacción se forma una *sal* y *agua*: *Ácido* + *base* → *sal* + *agua*. Son *reacciones exotérmicas* que desprenden calor.

Ejemplo: $NaOH\ (ac) + HCl\ (ac) \rightarrow NaCl\ (ac) + H_2O\ (l)$

Reacciones Redox (reducción – oxidación)

Son aquellas en las cuales los reactivos se intercambian electrones, provocando cambios en sus *estados de oxidación* respecto a los productos. En las *reacciones Redox* uno de los elementos cede electrones (se oxida) y otro los acepta (se reduce). En la **oxidación** se pierden electrones y en la **reducción** se ganan.

Ejemplo: $Fe_2O_3 + 3\ CO \rightarrow 2\ Fe + 3\ CO_2$

Reacciones de combustión

La **combustión** es la reacción de una *sustancia combustible* con el *oxígeno* (*comburente*). Son reacciones que transcurren muy rápidamente y con un desprendimiento notable de energía (*reacción exotérmica*). Químicamente son *oxidaciones*.

Siempre que se quema un hidrocarburo (compuesto que contiene únicamente carbono e hidrógeno) se obtiene dióxido de carbono, agua y energía.

$$\text{Combustible} + O_2\ (g) \rightarrow CO_2 + H_2O + \text{Energía calorífica (KJ o Kcal)}$$

Las combustiones son las reacciones que aportan la mayor parte de la energía que utilizamos en la vida diaria, tanto en procesos biológicos, como industriales o domésticos.

El cuerpo humano obtiene energía de la combustión de la *glucosa*. Durante la digestión, los alimentos se rompen en sustancias más simples, entre ellas la *glucosa*, que reacciona con el oxígeno presente en las células de nuestro cuerpo. Esta reacción ocurre en las mitocondrias de las células y se denomina *respiración celular*.

Reacciones de fotosíntesis

Es una reacción en la que se produce materia orgánica (*glucosa, almidón, lípidos, proteínas, etc.*) a partir del *dióxido de carbono* y el *agua*. Se realiza en los *cloroplastos* de las células vegetales, donde hay una sustancia llamada *clorofila* que actúa como catalizador, absorbiendo parte de la radiación solar necesaria para que comience esta reacción.

7. ESTEQUIOMETRÍA DE LA REACCIONES QUÍMICAS.

La **estequiometría** es la parte de la química que estudia las *relaciones cuantitativas* entre las sustancias que intervienen en una reacción química (reactivos y productos).

Los *coeficientes estequiométricos* que hemos introducido para ajustar una reacción química nos dan una información fundamental a nivel molecular. Indican la relación en números enteros sencillos entre las moléculas que reaccionan o se producen. Así por ejemplo, si observamos el siguiente esquema de reacción:

$$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$$

indica que por cada molécula de oxígeno (O_2) consumida se consumen 2 moléculas de hidrógeno (H_2) y dan lugar a su vez a 2 moléculas de agua (H_2O).

7.1. CÁLCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS.

Además de conocer el número de moléculas de cada sustancia que reaccionan o se producen en el transcurso de una reacción química, es posible establecer otras interpretaciones cuantitativas a partir de la ecuación ajustada.

$$N_2 + 3\ H_2 \rightarrow 2\ NH_3$$

Esos mismos *coeficientes estequiométricos* también representan el *número de moles* en la reacción. Es decir, *1 mol de* N_2 reacciona con *3 moles de* H_2 produciendo *2 moles de moléculas de* NH_3.

A finales del siglo XVIII, un químico francés, *Joseph Louis Proust* (1754-1826), observó que "*en todas las reacciones químicas la proporción entre las masas de las sustancias que reaccionan era constante*". Es lo que se conoce como la **ley de Proporciones constantes** (*Ley de Proust*). Esta proporción recibe el nombre de **proporción estequiométrica**.

Si los reactivos se hallan en la *proporción estequiométrica* no quedará nada de ninguno de ellos cuando la reacción finalice. Si no están en la proporción adecuada, habrá un reactivo que se agotará en primer lugar lo que marcará el final (límite) de la reacción. Este reactivo recibe por ello el nombre de **reactivo limitante**. En ese caso, la masa sobrante del otro reactivo permanecerá al final de la reacción. Este reactivo recibe por ello el nombre de **reactivo en exceso**.

Considerando que el **mol** es la magnitud del Sistema Internacional para expresar cantidad de materia, podemos obtener, observando los *coeficientes estequiométricos* de la reacción, una **relación de estequiometría en masa**.

Esto nos permite realizar cálculos de cantidades de *reactivos* y *productos* en procesos tanto de laboratorio como industriales. Pero para obtener esta última relación es preciso calcular previamente la *masa molecular* de cada sustancia.

En todo **cálculo estequiométrico** se deben dar los siguientes pasos:

1. Se ha de hallar el *número de moles* de la *sustancia dato* o *de partida*.
2. Se buscará la *equivalencia entre el número de moles de la sustancia dato* y la *sustancia deseada* a partir de la ecuación química ajustada.
3. Se halla el *número de moles de la sustancia deseada*.
4. A partir del número de moles de la sustancia deseada se calculará la magnitud que se nos pida: masa, número de moléculas, o cualquier otra magnitud que dependa del número de moles.

Existen varios métodos para resolver *problemas estequiométricos*, uno es el **método de la relación molar**.

Una **relación molar** es un factor de conversión que relaciona las cantidades en moles de dos sustancias cualesquiera en una reacción química. Los datos para calcular la *relación molar* se obtienen de los *coeficientes estequiométricos* de la ecuación química ajustada.

$$\boldsymbol{relación\ molar} = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ de\ partida}$$

La **sustancia deseada** es la que se presenta como la *incógnita* y puede darse en moles, gramos o litros; la **sustancia de partida** se presenta como *dato* y puede darse en moles, gramos o litros.

En los *problemas estequiométricos* es habitual realizar conversiones para determinar la cantidad de moles de cualquier sustancia o compuesto dada su masa o al contrario. Para ello utilizaremos la siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{n^{o}\ de\ moles\ (n) = \frac{Masa\ (g)}{Masa\ molar\ (\frac{g}{mol})}}\ ;\ \boldsymbol{masa\ (g) = n^{o}\ moles\ (n) \cdot Masa\ molar\ (\frac{g}{mol})}$$

Vamos a utilizar lo que hemos aprendido en unos ejemplos en los que haremos cálculos con moles, gramos, moléculas y átomos.

- Ejemplo 1: ¿Cuántos moles hay en 100 g de agua? ¿Cuántas moléculas? ¿Cuántos átomos?

  Datos: 1 *mol de* H_2O = 18 g = $6{,}023 \cdot 10^{23}$ moléculas de agua.

$$100g \cdot \frac{1\ mol\ de\ H_2O}{18g\ de\ H_2O} = 5{,}56\ moles\ de\ H_2O$$

$$5{,}56\ moles\ de\ H_2O \cdot \frac{6{,}023 \cdot 10^{23} moléculas}{1\ mol\ de\ H_2O} = 3{,}35 \cdot 10^{24}\ moléculas\ de\ H_2O$$

$$3{,}35 \cdot 10^{24}\ moléculas\ de\ H_2O \cdot \frac{3\ átomos}{1\ molécula\ de\ H_2O} = 10{,}05 \cdot 10^{24}\ átomos$$

- Ejemplo 2: ¿Cuántos gramos son tres moles de ácido sulfúrico, H_2SO_4? ¿Cuántos átomos de oxígeno hay en esos tres moles?

  Datos: 1 mol H_2SO_4 = 98 g = $6{,}023 \cdot 10^{23}$ moléculas.

$$3\ moles\ de\ H_2SO_4 \cdot \frac{98g}{1\ mol\ de\ H_2SO_4} = 294g\ de\ H_2SO_4$$

$$3\ moles\ de\ H_2SO_4 \cdot \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\ moléculas}{1\ mol\ de\ H_2SO_4} \cdot \frac{4\ átomos\ de\ oxígeno}{1\ molécula\ de\ H_2SO_4} = 7{,}2 \cdot 10^{24}\ átomos\ de\ O$$

- Ejemplo 3: Reaccionan 100 g de hidrógeno con oxígeno según la ecuación:

$$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$$

  Calcule:

  a) La masa de oxígeno necesaria para la reacción de todo el hidrógeno.

  b) La masa de agua formada.

  c) Compruébese que se cumple la ley de Lavoisier.

  a) En *1 mol de* H_2 hay 2 g de H_2. Entonces en 100 g habrá:

$$Moles\ de\ H_2 de\ partida = 100g \cdot \frac{1\ mol\ de\ H_2}{2g\ de\ H_2} = 50\ moles\ de\ H_2$$

$$\boldsymbol{relación\ molar} = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ de\ partida} = \frac{1\ mol\ de\ 0_2}{2\ moles\ de\ H_2} = \mathbf{0{,}5}$$

$$Moles\ de\ O_2\ necesarios = relación\ molar \cdot 50\ moles\ de\ H_2 = 0{,}5 \cdot 50 = 25\ moles\ de\ O_2$$

$$Masa\ de\ O_2 = 25\ moles\ de\ 0_2 \cdot \frac{32g\ de\ 0_2}{1\ mol\ de\ 0_2} = \boldsymbol{800g\ de\ O_2}$$

  b)

$$\boldsymbol{relación\ molar} = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ de\ partida} = \frac{2\ moles\ de\ H_2O}{2\ moles\ de\ H_2} = \mathbf{1}$$

$$Moles\ de\ H_2O\ necesarios = relación\ molar \cdot 50\ moles\ de\ H_2 = 1 \cdot 50 = 50\ moles\ de\ H_2O$$

$$Masa\ de\ H_2O = 50\ moles\ de\ 0_2 \cdot \frac{18g\ de\ H_2O}{1\ mol\ de\ H_2O} = \boldsymbol{900g\ de\ H_2O}$$

c) La *ley de Lavoisier* dice: *masa de reactivos = masa de productos*. En nuestro caso:

100 g de H_2 + 800 g O_2 = 900 g de H_2O

8. LA QUÍMICA EN LA SOCIEDAD.

Pese a que la imagen que dan los medios de la química no suele ser positiva (industrias, contaminación, adulteración de alimentos, cambio climático, etc.), la realidad es que buena parte del bienestar social conseguido por nuestra sociedad se sustenta en las aportaciones de la química.

La **química** ha estado presente en la vida del ser humano desde la antigüedad. El descubrimiento del fuego y su uso tanto en la cocción de alimentos como en la fabricación de recipientes de barro marca el comienzo de la civilización.

Sin ir más lejos, algunos periodos históricos reciben el nombre del metal asociado a su tecnología: edad de hierro, edad de bronce...

En la Edad Media se desarrolló la *alquimia*, una mezcla entre filosofía, misticismo y tecnologías varias. La búsqueda de la *piedra filosofal* que transformara cualquier material en oro permitió el desarrollo de nuevos experimentos y el descubrimiento de muchos elementos químicos hasta entonces desconocidos que sentaron la base de la química moderna.

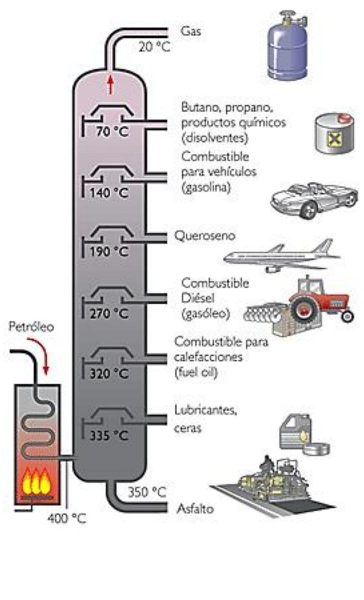
El desarrollo de la química como ciencia moderna se produjo con la llegada de la **revolución industria**l, a principios del siglo XIX, con la introducción de materiales tecnológicos como el *acero* o el *hormigón armado*.

En la actualidad, los campos de investigación de la química son muy numerosos, fruto de la especialización tanto de procesos como de investigadores, provocando la aparición de la *ingeniería química* como respuesta a las necesidades industriales. De entre estos campos, destaca la *química de los materiales*, que desarrolla, entre otros, superconductores, cristales líquidos o cerámicas con propiedades hasta hace poco de ciencia ficción y que contribuirán a mejorar nuestra calidad de vida.

8.1. LA INDUSTRIA QUÍMICA.

La industria química es muy variada y abarca gran cantidad de campos de producción. Entre ellos podemos destacar:

1. La **industria petroquímica** trabaja con el *petróleo y sus derivados*. El proceso básico por el que se obtienen los subproductos del petróleo se denomina *destilación fraccionada* y tiene lugar en las *refinerías*. Este proceso se basa en la separación de los componentes del *petróleo* en una torre, en virtud de su distinto punto de ebullición. Los componentes más



pesados, como el alquitrán, se quedan en la parte baja, mientras que los más volátiles, como el éter, ascienden hasta la parte superior.

Dentro de la industria petroquímica destaca la industria de los *polímeros*, que son parte imprescindible de nuestra vida cotidiana como las botellas, alfombras, mangueras, tuberías, juguetes, fibras textiles y un larguísimo etcétera son materiales constituidos por distintos tipos de polímeros.

Un **polímero** es una macromolécula formada por la unión de muchas unidades sencillas que se repiten y que se llaman *monómeros*. Hay muchos tipos de polímeros diferentes. En la fabricación de los polímeros sintéticos se utilizan **reacciones de polimerización**, cuyo resultado es la unión química de *monómeros*.

2. La **industria metalúrgica** tiene como objetivo la obtención de *metales puros* a partir de los materiales naturales que los contienen (minerales). La industria metalúrgica más importante es la del *acero*, también denominada *siderúrgica*, producido en los altos hornos.
3. La **industria química tradicional** está especializada en la obtención de *productos básicos* como el amoniaco, el ácido sulfúrico, el hidróxido sódico o el cloro. También produce abonos y pesticidas para uso agrícola.
4. La **industria agroalimentaria** es la dedicada a producir y transformar los alimentos. Actualmente es muy importante por el aumento del uso de *aditivos alimentarios* debido al aumento de alimentos preparados a los que hay que añadir productos que aseguren su conservación.
5. La **industria de materiales de construcción** se encarga de fabricar los materiales empleados en la construcción de edificios, vías de comunicación y resto de obras públicas. Su producto principal es el *cemento* (mezcla de óxido de calcio y dióxido de silicio) así como el *yeso*, el *vidrio* o los *productos cerámicos*.
6. La **industria farmacéutica**, es un sector empresarial dedicado a la investigación, fabricación, preparación y comercialización de toda clase de *medicamentos* para el tratamiento y también la prevención de las enfermedades. Debido a que su actividad afecta directamente a la salud humana, esta industria está sujeta a una gran variedad de leyes y reglamentos con respecto a las investigaciones, patentes, pruebas y comercialización de los fármacos. Una gran parte de la producción de la industria farmacéutica corresponde a *vacunas*.

9. QUÍMICA Y PROGRESO.

Ahora que ya tenemos una visión global de la relación entre la química y la sociedad, veamos algunos de los desarrollos que han facilitado la vida de las personas:

- **Química y conservación de los alimentos**. El ser humano ha utilizado desde siempre la sal, el aceite, el vinagre o las especias para lograr la conservación de los alimentos. Hoy en día existe una gran variedad de productos para tal fin:

- *Conservantes*: empleados para impedir el crecimiento de microorganismos.
- *Acidulantes*: utilizados para dar o intensificar un sabor característico.
- *Antioxidantes*: evitan que los alimentos se pongan rancios (oxidación).
- *Colorantes*: mejoran el aspecto externo de los alimentos.

- **Nuevos materiales**. Denominamos material a aquella sustancia que es útil para un determinado proceso. De entre los desarrollos actuales se pueden destacar:
  - *Plásticos*: no sólo estructuras plásticas moldeables sino también fibras artificiales.
  - *Materiales compuestos*: como la fibra de carbono, de gran rigidez y ligereza.
  - *Cerámicas técnicas*: materiales muy duros y ligeros, aunque frágiles. Se utilizan en prótesis e industria espacial, por soportar muy bien altísimas temperaturas.
- **Química y salud**. Incluimos dentro de este apartado:
  - *Desarrollos farmacéuticos* (medicamentos, vacunas...) que han permitido un aumento en la esperanza de vida así como en la calidad de la misma.
  - *Productos higiénicos y cosméticos*, que tanto influyen en las relaciones sociales.
- **Química y agricultura**. Permiten mejorar la producción y calidad de las cosechas:
  - *Pesticida*s: sirven para evitar las plagas de insectos u hongos.
  - *Fertilizantes*: aportan al terreno los nutrientes necesarios para el desarrollo de las plantas.
  - *Herbicidas*: utilizados para matar las malas hierbas en los cultivos.

RESUMEN DEL TEMA 2

1. LOS SISTEMAS MATERIALES.

Un **sistema material** es una porción de materia que se aísla física o mentalmente para facilitar su estudio experimental.

La arena de la playa, el agua del mar, el aire, la sal, el granito, el hielo, etc., son algunos de los muchos *sistemas materiales* que podemos observar en la naturaleza.

Muchos *sistemas materiales* están formados por dos o más sustancias diferentes que se distinguen a simple vista. Debido a que su aspecto no es uniforme, decimos que son **sistemas materiales heterogéneos**

Otros presentan un aspecto uniforme, aunque pueden constituirlos una o más sustancias, y los llamamos **sistemas materiales homogéneos**.

2. LOS SISTEMAS MATERIALES HETEROGÉNEOS.

En un **sistema material heterogéneo**, o **mezcla heterogénea**, los componentes se distinguen a simple vista, porque se trata de sustancias diferentes, por ejemplo, agua y arena o de la misma sustancia en dos fases, por ejemplo, agua y hielo. Por tanto, estos sistemas no presentan la misma composición ni las mismas propiedades en todos sus puntos.

Podemos preparar una *mezcla heterogénea* agregando cantidades variables de cada una de las sustancias que formen parte de la mezcla .

Cada componente de una *mezcla heterogénea* conserva sus propiedades físicas características y esto facilita su separación. Los componentes de una mezcla heterogénea se separan mediante **procedimientos físicos**, como la *separación magnética, la filtración y la decantación*.

3. LOS SISTEMAS MATERIALES HOMOGÉNEOS.

Un **sistema material homogéneo** tiene la misma composición química y las mismas propiedades en todos sus puntos. No obstante, puede estar constituido por uno o más componentes. En el primer caso se tratará de una **sustancia pura** y en el segundo, de una **disolución**.

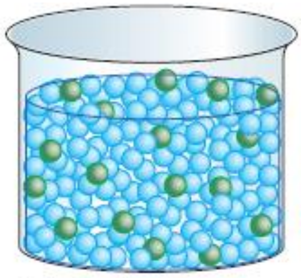
Una **sustancia pura** mantiene siempre sus propiedades características (densidad, punto de fusión y ebullición…) constantes, lo cual no sucede en una *disolución*.

Una **disolución** es un *sistema material homogéneo* formado por dos o más *sustancias puras* que pueden mezclarse en proporciones variables.

En general, el componente de una *disolución* que se encuentra en mayor proporción se denomina **disolvente**, y el que se encuentran en menor proporción se llaman **soluto**.

Por ejemplo, el *aire* es una disolución de gases en la que el *nitrógeno* (80 %) es el *disolvente* y el *oxígeno* (20 %) es el *soluto*.

En una *disolución*, las partículas del disolvente dispersan a las del soluto, que quedan distribuidas entre las del disolvente. De ahí el aspecto homogéneo de la misma.



Partículas de soluto dispersas en una disolución.

Dependiendo del número de componentes que entran a formar parte de una disolución, estas se clasifican en *binarias, ternarias, cuaternarias*, etc. Una *disolución acuosa* es aquella en la que el disolvente es el agua.

Una **aleación** es una *disolución sólida* formada por dos o más *elementos químicos*, uno de los cuales al menos, es metálico. Se obtiene por fusión y posterior solidificación de sus componentes. Algunas de las *aleaciones* más conocidas son *el acero, el bronce, el latón, el estaño y el oro blanco*.

3.1. CUANTIFICACIÓN DE LA MATERIA.

Para medir la **cantidad de sustancia** debemos partir que toda materia está formada por partículas, átomos o moléculas.

Las masas de los átomos son extremadamente pequeñas, por lo que el gramo es una unidad demasiado grande para medirla. Por ello, las masas de los átomos se comparan con la masa de uno de ellos, al que llamaremos *átomo patrón*. Actualmente las masas de los átomos se comparan con el *isótopo de carbono-12*, al que se le asigna el valor de doce unidades. Por eso, se define la **unidad de masa atómica (u.m.a.)** como la doceava parte del isótopo de carbono-12. Lo que equivale a: $\boldsymbol{1u = 1{,}66.10^{-24}\ g}$.

La **masa atómica (M_a)** es la masa de un átomo expresada en *unidades de masa atómica (u)*. Por ejemplo, el hidrógeno, tiene una masa atómica de *1,00794 u* y el oxígeno, tiene una masa atómica de *15,999 u*. La *masa atómica* de un elemento se conoce también como **peso atómico**. La masa de un átomo de un elemento, la puedes encontrar en la tabla periódica.

La **masa molecular (M_m)** es la masa de una molécula expresada en *unidades de masa atómica (u)*. Se obtiene sumando las *masas atómicas* de los elementos químicos presentes en la molécula teniendo en cuenta el número de átomos de cada elemento.

Por ejemplo, la *masa molecular del agua (H_2O)* es:

M_m (H_2O) = 2 ·1,00794 u + 1 ·15,999 = 18,015 u.

En Química no podemos trabajar a nivel atómico o molecular porque estamos hablando de masas al nivel de 10^{-24} g. En la práctica se necesita trabajar con cantidades enormes de átomos. Es, por ello, por lo que nace el concepto de *mol*.

Un **mol** es la cantidad de materia que contiene $6{,}023\cdot10^{23}$ partículas. Entonces, un *mol de átomos* está formado por $6{,}023\cdot10^{23}$ *átomos*, un *mol de moléculas* está formado por $6{,}023\cdot10^{23}$ *moléculas*, un *mol de virus* son $6{,}023\cdot10^{23}$ *virus*, etc. El *mol* es la unidad en la que se mide la **cantidad de sustancia** en el S.I.

El número **$6{,}023\cdot10^{23}$** es el **número de Avogadro (N_A)** (*Amedeo Avogadro*, 1776-1856). Se escogió este número para que coincidencia numéricamente la masa de un átomo expresada en *u.m.a.* y la masa de $6{,}023\cdot10^{23}$ átomos expresada en gramos.

Por ejemplo, 1 átomo de cobre (Cu) tiene una *masa atómica* de *63,55 u*. 1 mol de átomos de cobre son $6{,}023 \cdot 10^{23}$ *átomos de cobre*, que son a su vez*, 63,55 g* de cobre.

Lo mismo sucede con el agua (H_2O). El agua tiene una *masa molecular* de *18,015 u*. Por tanto, *1 mol de moléculas de agua* (H_2O) son *18,015 g de agua*.

La **masa molar** es la masa de un mol de partículas, Se expresa en *g/mol*. Así se deduce que la *masa molar del cobre* es *63,55 g/mol* y la *masa molar del agua* es *18,015 g/mol*.

La *masa molar* se utiliza en cálculos de moles a partir de una cierta cantidad de sustancia. La relación entre la *masa de una sustancia*, la *masa molar* y el *mol* de esa sustancia es:

$$\boldsymbol{n\text{ú}mero\ de\ moles\ (n)} = \frac{\boldsymbol{masa\ de\ sustancia\ (m)}}{\boldsymbol{masa\ molar\ (M)}}$$

3.2. CONCENTRACIÓN DE UNA DISOLUCIÓN.

Para preparar una *disolución* necesitamos conocer la cantidad de *soluto* que hay que agregar a una cantidad determinada de *disolvente*, es decir, su *concentración*.

La **concentración** de una *disolución* es la cantidad de soluto que hay disuelta en una determinada cantidad de disolvente o de disolución.

La **solubilidad** es la cantidad máxima de soluto que puede disolverse en una determinada cantidad de disolvente, a una temperatura dada. Según sea la *concentración* de una disolución se pueden clasificar como:

a) **Diluidas**, si tienen poca cantidad de soluto disuelto.
b) **Concentradas**, si tienen mucha cantidad de soluto disuelto.
c) **Saturadas**, si ya no se puede disolver más soluto en esa cantidad de disolvente (depende de la temperatura).
d) **Sobresaturadas**, cuando contienen más soluto del que corresponde a esa cantidad de disolvente. Se preparan modificando la temperatura.

La *solubilidad* de las sustancias depende de varios factores:

- **Del soluto y del disolvente**: hay solutos que se disuelven mejor que otros, como ocurre con las diferentes marcas de cacao, unas se disuelven mejor en leche que otras. O disolventes que disuelven mejor algunos solutos, como por ejemplo el agua disuelve mejor la sal que el aceite.
- **De la temperatura**: cuando el soluto es un sólido al aumentar la temperatura aumenta la *solubilidad*, esto lo vemos cuando utilizamos leche caliente que favorece la disolución del cacao. Pero si el soluto es un gas ocurre lo contrario, la temperatura hace que disminuya la *solubilidad*, pues favorece que los gases escapen de la disolución.

Existen diferentes formas de expresar la *concentración de una disolución*, cada una es adecuada en función del estado de agregación de las sustancias a combinar. Si combinamos un sólido con un líquido usaremos "**Tanto por ciento en masa**" o bien "**Concentración en masa**". Si lo que combinamos son dos líquidos, sus volúmenes son fáciles de medir y para ellos será más recomendable utilizar "**Tanto por ciento en volumen**".

3.2.1. CONCENTRACIÓN EN TANTO POR CIENTO EN MASA.

Si utilizamos como unidad de masa el gramo (g), el **tanto por ciento en masa** de un soluto en una disolución será la masa del soluto (g) disuelta en 100 g de disolución.

$$\%\, \boldsymbol{masa\ del\ soluto} = \frac{\boldsymbol{masa\ del\ soluto\ (g)}}{\boldsymbol{masa\ de\ la\ disoluci\text{ó}n\ (g)}} \cdot \mathbf{100}$$

Por ser un porcentaje, el resultado no tiene unidades. Esta forma de expresar la concentración es habitual para indicar la riqueza de cada componente en una *aleación* de metales o en otras mezclas de sustancias sólidas.

3.2.2. CONCENTRACIÓN EN MASA.

La **concentración en masa** nos informa acerca de la masa de soluto disuelta en cada unidad de volumen de disolución. Aunque la concentración en masa debería expresarse en kg/m^3, es más frecuente hacerlo en g/cm^3 o en g/L.

$$\boldsymbol{Concentraci\text{ó}n\ en\ masa} = \frac{\boldsymbol{Masa\ del\ soluto}}{\boldsymbol{Volumen\ de\ disoluci\text{ó}n}}$$

3.2.3. CONCENTRACIÓN EN TANTO POR CIENTO EN VOLUMEN.

El **tanto por ciento en volumen** de un soluto es el *número de unidades de volumen del soluto* disuelto en *100 unidades de volumen de disolución*.

El *volumen de disolución* es la suma del *volumen de disolvente* y los *volúmenes de todos los solutos* presentes en la disolución. Por ser un porcentaje, el resultado carece de unidades.

$$\%\, \boldsymbol{Volumen\ del\ soluto} = \frac{\boldsymbol{Volumen\ del\ soluto}}{\boldsymbol{Volumen\ de\ disoluci\text{ó}n}} \cdot \mathbf{100}$$

3.2.4. CONCENTRACIÓN MOLAR O MOLARIDAD.

La **Molaridad (M)** o **Concentración Molar** es el número de moles de soluto que están disueltos en un determinado volumen. Se representa generalmente con la letra M. Es una medida de concentración muy utilizada en química y bioquímica, expresada como mol/L, aunque en realidad sus unidades del S.I. son mol/m^3 (milimolar).

$$\boldsymbol{Molaridad\ (M)} = \frac{\boldsymbol{n^{o}\ de\ moles}}{\boldsymbol{Volumen\ disoluci\text{ó}n}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{V}}$$

Como el volumen (V) varía con la temperatura (T) mediante la expansión y la contracción, la *molaridad (M)* también va a variar con la temperatura (T).

4. ESTUDIO DEL ESTADO GASEOSO. LEYES DE LOS GASES.

El **estado gaseoso** es el que más fácilmente se estudia, ya que para describir la situación de un gas que se encuentra en un recipiente cerrado basta con conocer cuatro magnitudes: **cantidad** de gas (masa), **volumen** del recipiente, **temperatura** a la que se encuentra y **presión** que produce.

La *presión* es una magnitud que mide la relación entre la fuerza realizada sobre un objeto y la superficie sobre la que se realiza. Es decir, **P = F/S**. Utilizando el S.I., se mide en **pascales (Pa)**, pero es muy habitual medirla en los laboratorios **atmósferas (atm)**.

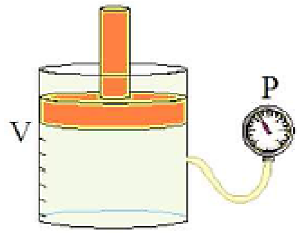
La presión que ejerce el aire que hay la atmósfera sobre la superficie de la Tierra y todos los objetos y seres que hay sobre ella, se conoce como **presión atmosférica**. La presión normal es de 1 atmósfera (1 atm). Equivalencias: *1 atm = 760 mm Hg = 101325 Pa*.

La presión de los gases se mide con aparatos que se llaman *manómetros*. Los aparatos que miden la presión atmosférica se llaman *barómetros*.

La *temperatura* es una magnitud que está relacionada con el movimiento de las partículas. Si la temperatura aumenta las partículas que forman las sustancias se mueven a mayor velocidad. Cuando calentamos una sustancia observamos que sube la temperatura.

Como ya hemos comentado, los gases se expanden por el recipiente en que están. Así que el *volumen* de un gas es el volumen del recipiente que lo contiene.

El comportamiento de los gases se rige por las leyes siguientes:

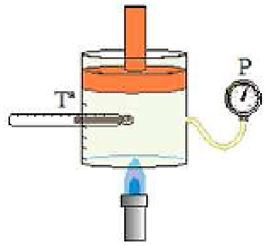


- **<u>Ley de Boyle y Mariotte</u>**

  Regula las transformaciones gaseosas a *temperatura constante* y establece la relación:

$$P \cdot V = cte. \rightarrow P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

  Es decir, la *presión* y el *volumen* de un gas son magnitudes inversamente proporcionales, si se mantiene la temperatura constante.

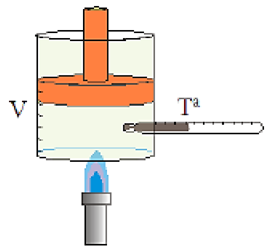


- **<u>Ley de Gay-Lussac</u>**

  Regula las transformaciones gaseosas a *volumen constante*.

$$\frac{P}{T} = cte. \rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

  Es decir, la *presión* y la *temperatura* de un gas son directamente proporcionales, si se mantiene el volumen constante. En la relación anterior, las temperaturas deben expresarse en grados *Kelvin*.



- **<u>Ley de Charles</u>**

  Regula las transformaciones gaseosas a *presión constante*.

$$\frac{V}{T} = cte. \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

  Es decir, el *volumen* y la *temperatura* de un gas son directamente proporcionales, si se mantiene la presión constante. En la relación anterior, las temperaturas deben expresarse en grados *Kelvin*.

- **<u>Ley general de los gases perfectos</u>**

  En las transformaciones en las que varían a la vez la presión, el volumen y la temperatura, los gases siguen una *ley general* dada por la ecuación:

$$\frac{P \cdot V}{T} = cte. \rightarrow \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Evidentemente la cantidad de gas influirá en sus propiedades. La ecuación que relaciona las propiedades de los gases con la cantidad de gas es la **ecuación de los gases ideales**:

P · V = n · R · T

En la que *n* es la cantidad de gas en *moles*, *R* es la constante universal cuyo valor es *0,08205 atm·l/mol·K*, y *P*, *V* y *T* son la presión, volumen y temperatura del gas medidas en atmósferas, litros y grados Kelvin, respectivamente.

5. CAMBIOS FÍSICOS Y QUÍMICOS.

Un **cambio físico** es aquél que no altera las sustancias que intervienen en él, es decir, siguen siendo las mismas sustancias. Ejemplo: evaporar agua, romper un papel, etc.

Un **cambio químico** es aquél que altera la naturaleza de las sustancias, transformándolas en otras totalmente diferentes. Este proceso es una *reacción química*. Ejemplo: quemar un papel, oxidarse el hierro, freír un huevo, etc.

6. REACCIONES QUÍMICAS Y ECUACIONES QUÍMICAS.

6.1. REACCIONES QUÍMICAS.

Una **reacción química** es un *fenómeno químico* mediante el cual se obtienen, a partir de unas sustancias iniciales llamadas **reactivos**, otras sustancias diferentes, que se denominan **productos**. Algunos enlaces entre los átomos de los reactivos se rompen, y los átomos se separan, para a continuación enlazarse de nuevo formando enlaces distintos, creando así nuevas sustancias (productos).

Este proceso que puede explicarse a partir de la denominada **teoría de colisiones** que consta de las siguientes etapas:

- Las moléculas de los reactivos se mezclan, pues están en continuo movimiento. Algunas chocan entre sí pero no tienen suficiente energía para romper los enlaces.
- Algunas moléculas chocan con la suficiente energía y en la dirección adecuada de forma que los enlaces que unen las moléculas de reactivos se rompen y se recombinan formando las nuevas moléculas de los productos.
- La reacción se propaga al conjunto de las moléculas hasta que se agota alguno de los reactivos.

Cabe destacar que el factor clave en esta teoría es la *velocidad de las moléculas*, ya que si esta no es suficiente la reacción no tendrá lugar.

6.2. LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.

En toda **reacción química** los **reactivos** son diferentes de los **productos** obtenidos, pero lo que no varía es el número de átomos presentes de cada uno de los elementos: se trata de una mera reordenación de los mismos.

La **ley de la conservación de la masa** (*Ley de Lavoisier*) indica que "*En cualquier sistema químicamente cerrado la masa de los productos es exactamente igual a la masa de los reactivos*".

6.3. ECUACIONES QUÍMICAS.

La **ecuación química** es la representación simbólica de una reacción química. A la izquierda se ponen las fórmulas de los *reactivos* y a la derecha las de los *productos*, separados por una flecha. Por ejemplo:

$$NH_3\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow H_2O\ (l) + NO_2\ (g)$$

Entre paréntesis se pone el estado físico de la sustancia: *(g) = gas*; *(l) = líquido*; *(s) = sólido*; *(ac) = disuelto en agua*; *(↓) = precipitado sólido insoluble que se va al fondo del recipiente*.

El "**+**" se lee como "reacciona con" y la flecha "→" significa "produce".

6.3.1. AJUSTE DE UNA ECUACIÓN QUÍMICA.

La *ecuación química* tiene que reflejar que, en la *reacción química* que representa, tiene que haber los mismos átomos de cada elemento en los *reactivos* y en los *productos*, solo cambia la forma de emparejarse entre ellos. Por esto tenemos que *ajustar las ecuaciones químicas*.

Ajustar una ecuación química es encontrar el número de moléculas o moles de cada sustancia que reaccionan. Se puede hacer por **tanteo** (a veces no es fácil) o mediante un **método matemático**, hasta igualar el número de átomos en los dos miembros de la ecuación.

Por ejemplo, la siguiente *ecuación química* está ajustada:

$$4\ NH_3\ (g) + 7\ O_2\ (g) \rightarrow 6\ H_2O\ (l) + 4\ NO_2\ (g)$$

Los números que ponemos delante de las fórmulas de cada sustancia se llaman **coeficientes estequiométricos** (el coeficiente 1 se omite), e indican el número de moléculas o moles de cada uno de los reactivos que reaccionan y de cada producto que se forma. A la hora de ajustar, siempre se intentará que los *coeficientes estequiométricos* sean enteros y lo menores posibles.

6.4. TIPOS DE REACCIONES QUÍMICAS.

Dentro del gran número de reacciones químicas que se pueden producir, hay algunas que tienen mayor importancia. Algunas son imprescindibles para la vida y otras son fundamentales en la industria química y farmacéutica.

<u>Reacciones de combinación o síntesis</u>

En este tipo de reacciones, se combinan dos o más sustancias que pueden ser elementos o compuestos para formar un producto. <u>Ejemplo</u>: síntesis del amoniaco: $N_2 + 3\ H_2 \rightarrow 2\ NH_3$.

<u>Reacciones de descomposición</u>

En una *reacción de descomposición*, una sola sustancia se descompone, produciendo dos o más sustancias distintas. La sustancia inicial debe ser un compuesto y los productos pueden ser elementos o compuestos. Generalmente se necesita calor para que ocurra la reacción.

<u>Ejemplo</u>: $2\ H_2O_2 \rightarrow 2\ H_2O + O_2$.

<u>Reacciones de desplazamiento (sustitución)</u>

En una *reacción de simple desplazamiento* un elemento reacciona con un compuesto y toma el lugar de uno de los elementos del compuesto, produciendo un elemento distinto y un compuesto también diferente. <u>Ejemplo</u>: $Mg\ (s) + 2\ HCl\ (ac) \rightarrow MgCl_2\ (ac) + H_2\ (g)$

En una *reacción de doble desplazamiento*, dos compuestos intercambian parejas entre sí, para producir compuestos distintos. Ejemplo: $CH_4 + Cl_2 \rightarrow CH_3Cl + HCl$

Reacciones de precipitación (disolución)

Son aquellas que dan como resultado la formación de un producto insoluble, llamado *precipitado*. El *precipitado* es un sólido insoluble que se forma por una reacción en disolución.

Ejemplo: $AgNO_3 + NaCl \rightarrow AgCl\ (s) + NaNO_3$.

Reacción ácido - base (neutralización)

Un **ácido** en medio acuoso se separa aportando iones hidrógeno H^+ y una **base** en medio acuoso se separa produciendo iones hidróxido OH^-. Debido a esta formación de iones los *ácidos* y las *bases* en disolución conducen la corriente eléctrica.

Ejemplos: $HCl\ (ac) \rightarrow Cl^- + H^+$; $NaOH\ (ac) \rightarrow Na^+ + OH^-$.

Una *reacción de neutralización* es aquélla en la cual reacciona un *ácido* con una *base*. En la reacción se forma una *sal* y *agua*: *Ácido + base → sal + agua*. Son *reacciones exotérmicas* que desprenden calor.

Ejemplo: $NaOH\ (ac) + HCl\ (ac) \rightarrow NaCl\ (ac) + H_2O\ (l)$

Reacciones Redox (reducción – oxidación)

Son reacciones donde los reactivos se intercambian electrones, provocando cambios en sus *estados de oxidación*. En las *reacciones Redox* uno de los elementos cede electrones (se oxida) y otro los acepta (se reduce). En la **oxidación** se pierden electrones y en la **reducción** se ganan.

Ejemplo: $Fe_2O_3 + 3\ CO \rightarrow 2\ Fe + 3\ CO_2$.

Reacciones de combustión

La **combustión** es la reacción de una *sustancia combustible* con el *oxígeno* (*comburente*). Son reacciones que transcurren muy rápidamente y con un desprendimiento notable de energía (*reacción exotérmica*). Químicamente son *oxidaciones*.

Las combustiones son las reacciones que aportan la mayor parte de la energía que utilizamos en la vida diaria, tanto en procesos biológicos, como industriales o domésticos.

Siempre que se quema un hidrocarburo (compuesto que contiene únicamente carbono e hidrógeno) se obtiene dióxido de carbono, agua y energía.

$$Combustible + O_2\ (g) \rightarrow CO_2 + H_2O + Energía\ calorífica\ (KJ\ o\ Kcal)$$

Reacciones de fotosíntesis

Es una reacción en la que se produce materia orgánica (glucosa, almidón, lípidos, proteínas, etc.) a partir del dióxido de carbono y el agua. Se realiza en los cloroplastos de las células vegetales, donde hay una sustancia llamada clorofila que actúa como catalizador, absorbiendo parte de la radiación solar necesaria para que comience esta reacción.

7. ESTEQUIOMETRÍA DE LAS REACCIONES QUÍMICAS.

La **estequiometría** es la parte de la química que estudia las *relaciones cuantitativas* entre las sustancias que intervienen en una reacción química (reactivos y productos).

7.1. CÁCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS.

En todas las reacciones químicas se cumple la **ley de Lavoisier** y la **ley de proporciones constantes (Ley de Proust)** que dice: "*en todas las reacciones químicas la proporción entre las masas de las sustancias que reaccionan es constante*". Esta proporción recibe el nombre de **proporción estequiométrica**. Esta *proporción* la podemos expresar en moles, moléculas o gramos.

Si los reactivos se hallan en la *proporción estequiométrica* no quedará nada de ninguno de ellos cuando la reacción finalice. Si no están en la proporción adecuada, uno de ellos se agotará antes y limitará la posibilidad de una reacción completa. Al reactivo que se termina en primer lugar se le denomina **reactivo limitante**, y al que sobra, **reactivo en exceso**.

En todo **cálculo estequiométrico** se deben dar los siguientes pasos:

1. Se ha de hallar el *número de moles* de la *sustancia dato* o *de partida*.
2. Se buscará la *equivalencia entre el número de moles de la sustancia dato* y la *sustancia deseada* a partir de la ecuación química ajustada.
3. Se halla el *número de moles de la sustancia deseada*.
4. A partir del número de moles de la sustancia deseada se calculará la magnitud que se nos pida: masa, número de moléculas, o cualquier otra magnitud que dependa del número de moles.

Existen varios métodos para resolver *problemas estequiométricos*, uno es el **método de la relación molar**.

Una **relación molar** es un factor de conversión que relaciona las cantidades en moles de dos sustancias cualesquiera en una reacción química. Los datos para calcular la *relación molar* se obtienen de los *coeficientes estequiométricos* de la ecuación química ajustada.

$$\boldsymbol{relación\ molar} = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ de\ partida}$$

La **sustancia deseada** es la que se presenta como la *incógnita* y puede darse en moles, gramos o litros; la **sustancia de partida** se presenta como *dato* y puede darse en moles, gramos o litros.

En los *problemas estequiométricos* es habitual realizar conversiones para determinar la cantidad de moles de cualquier sustancia o compuesto dada su masa o al contrario. Para ello utilizaremos la siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{n^{o}\ de\ moles\ (n) = \frac{Masa\ (g)}{Masa\ molar\ (\frac{g}{mol})}}\ ;\ \boldsymbol{masa\ (g) = n^{o}\ moles\ (n) \cdot Masa\ molar\ (\frac{g}{mol})}$$

8. LA QUÍMICA EN LA SOCIEDAD.

La **química** ha estado presente en la vida del ser humano desde la antigüedad. El desarrollo de la química como ciencia moderna se produjo con la llegada de la **revolución industrial**, a principios del siglo XIX, con la introducción de materiales tecnológicos como el *acero* o el *hormigón armado*.

En la actualidad, los campos de investigación de la química son muy numerosos.

La industria química es muy variada y abarca gran cantidad de campos de producción. Entre ellos podemos destacar:

1. La **industria petroquímica** que trabaja con el *petróleo y sus derivados*. Dentro de la *industria petroquímica* destaca la industria de los *polímeros*.
2. La **industria metalúrgica** tiene como objetivo la obtención de *metales puros* a partir de los materiales naturales que los contienen (minerales). La *industria metalúrgica* más importante es la del *acero*, también denominada *siderúrgica*.
3. La **industria química tradicional** está especializada en la obtención de *productos básicos* industriales y domésticos (amoniaco, ácido sulfúrico, hidróxido sódico, cloro, etc.).
4. La **industria agroalimentaria** es la dedicada a producir y transformar los alimentos.
5. La **industria de materiales de construcción** se encarga de fabricar los materiales empleados en la construcción de edificios, vías de comunicación y resto de obras públicas.
6. La **industria farmacéutica**, dedicada a la investigación, fabricación, preparación y comercialización de toda clase de *medicamentos*.

9. QUÍMICA Y PROGRESO.

Todas nuestras actividades cotidianas se ven influenciadas en mayor o menor media por la Química. Gran parte del bienestar social conseguido por nuestra sociedad se sustenta en las aportaciones de la química. El impacto que tiene la química en nuestras vidas, se puede ver en determinados campos:

- **Química y conservación de los alimentos**. Con el fin de mejorar la conservación de los alimentos, el ser humano ha creado una variedad de productos para tal fin:
  – *Conservantes*: empleados para impedir el crecimiento de microorganismos.
  – *Acidulantes*: utilizados para dar o intensificar un sabor característico.
  – *Antioxidantes*: evitan que los alimentos se pongan rancios (oxidación).
  – *Colorantes*: mejoran el aspecto externo de los alimentos.
- **Nuevos materiales**. La investigación en el desarrollo de materiales tecnológicos ha dado lugar a la creación de nuevos materiales, entre los que se pueden destacar:
  – *Plásticos*: no sólo estructuras plásticas moldeables sino también fibras artificiales.
  – *Materiales compuestos*: como la fibra de carbono, de gran rigidez y ligereza.
  – *Cerámicas técnicas*: materiales muy duros y ligeros, aunque frágiles. Se utilizan en prótesis e industria espacial, por soportar muy bien altísimas temperaturas.
- **Química y salud**. Incluimos dentro de este apartado:
  – *Desarrollos farmacéuticos* (medicamentos, vacunas...) que han permitido un aumento en la esperanza de vida así como en la calidad de la misma.
  – *Productos higiénicos y cosméticos*, que tanto influyen en las relaciones sociales.
- **Química y agricultura**. Permiten mejorar la producción y calidad de las cosechas:
  – *Pesticidas*: sirven para evitar las plagas de insectos u hongos.

- *Fertilizantes*: aportan al terreno los nutrientes necesarios para el desarrollo de las plantas.
- *Herbicidas*: utilizados para matar las malas hierbas en los cultivos.

<u>ACTIVIDADES TEMA 2</u>: “LA MATERIA. GASES.

1. **Cita dos ejemplos de disoluciones binarias en las que el disolvente sea el agua (disolución acuosa).**
2. **Una pintora prepara una mezcla de pintura amarilla y pintura negra con 2,25 g de ocre y 0,75 g de negro. Calcula el tanto por ciento en masa de cada componente de esta mezcla.**
3. **Preparamos una disolución de nitrato de potasio disolviendo 20 g de nitrato en agua, hasta obtener un volumen final de disolución de 200 mL. Calcula la concentración en masa de esta disolución expresada en g/L.**
4. **Preparamos una disolución que contiene 100 mL de alcohol, 150 mL de acetona y 250 mL de agua. Determina el tanto por ciento en volumen de cada componente de la disolución.**
5. **Calcular la molaridad de una disolución de 250 ml en la que está disueltos 30 gramos de cloruro sódico (NaCl). <u>Datos</u>: masas atómicas → Na = 23 u, Cl = 35,45 u.**
6. **¿Por qué no se deben de dejar al sol los botes de spray de laca, de insecticidas, de nata, etc.? Elige la respuesta correcta.**
   a) Son contaminantes peligrosos.
   b) El sol perjudica el contenido de los botes.
   c) No se debe calentar los plásticos.
   d) Al calentarse, pueden llegar a explotar.
7. **Un recipiente de volumen variable contiene gas, de forma que cuando el volumen es de 10 litros la presión producida es de 20 atmósferas. Si se lleva el volumen hasta los 5 litros sin cambiar la temperatura, ¿cuál será el nuevo valor de la presión?**
8. **Un globo de un litro de volumen está a 25 ºC. Si se pone al sol su temperatura aumenta hasta 65 ºC. Indica lo que ocurre basándote en la teoría cinética de los gases y calcula el nuevo volumen.**
9. **En un recipiente de 5 l se introduce gas oxígeno a la presión de 4 atm y se observa que su temperatura es de 27 ºC ¿Cuál será su presión si la temperatura pasa a ser de 127 ºC sin que varíe el volumen?**
10. **Diez litros de aire a 25 °C se enfrían hasta 273 K. ¿Cuál será su volumen final si la presión ha permanecido constante?**
11. **Una bombona de dióxido de carbono tiene un volumen de 2 dm^3. La presión del gas en el interior es de 80 atm a 25 °C. ¿Qué volumen ocuparía este gas si la presión fuera de 1 atm? La temperatura no varía.**
12. **A continuación se indican una serie de cambios que han sufrido algunos objetos. Indica cuáles son cambios físicos y cuáles son cambios químicos.**
    a) Una botella rota.
    b) Mantequilla derretida.
    c) La fotosíntesis que se produce en las plantas.

d) Un balón de futbol en movimiento.
e) La ceniza que se forma en una hoguera al quemar madera.

13. Completa correctamente las siguientes frases:

a) Los cambios de ________ son ejemplos de cambios ________.
b) Un cambio _________ es aquél que altera la naturaleza de las sustancias, transformándolas en otras totalmente ______________.
c) Una reacción química es un fenómeno químico mediante el cual se obtienen, a partir de unas sustancias iniciales llamadas ___________, otras sustancias diferentes, que se denominan ___________.
d) En toda ____________________ tiene que haber los mismos _________ de cada elemento en los reactivos y en los productos.
e) Los coeficientes ___________________ indican en qué proporción intervienen en la reacción las cantidades (número de moles) de reactivos y de productos de la reacción.

14. Ajusta las siguientes ecuaciones químicas por tanteo:

a) $CH_4 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$
b) $HCl + Ca \rightarrow CaCl_2 + H_2$
c) $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

15. Ajustar la siguiente ecuación química por tanteo:

$Mg_3B_2 + H_2O \rightarrow Mg(OH)_2 + B_2H_6$

16. Ajustar la siguiente ecuación química por tanteo:

HCl + _ $Al_2O_3 \rightarrow$ _ $AlCl_3$ + _ H_2O

17. Ajusta algebraicamente la siguiente ecuación química en la que aparece el amoniaco.

$NH_3\,(g) + O_2 \rightarrow NO_2\,(g) + H_2O\,(l)$

18. El cloro se obtiene industrialmente mediante la descomposición electrolítica del agua del mar, según la siguiente reacción química. Ajústala, algebraicamente.

$NaCl + H_2O \rightarrow NaOH + Cl_2 + H_2$

19. Ajusta algebraicamente la siguiente ecuación química:

$C_8H_8O_2 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

20. Hallar las masas molares de:

a) H_2O.
b) $Al_2(SO_4)_3$.
c) CH_4.
d) H_2SO_4.
e) Fe_2O_3.

21. Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántas moléculas de ácido sulfúrico (H_2SO_4) hay en 5 moles de dicho compuesto?
b) ¿Cuántas moléculas de NaOH hay en 4 moles de dicho compuesto?
c) ¿Cuántas moléculas de SO_2 hay en 3 moles de dicho compuesto?

22. Calcula:

a) La masa de una molécula de SO_2 en gramos.

b) La masa de una molécula de $CaCO_3$ en gramos.

c) La masa de una molécula de Fe_2O_3 en gramos.

23. Calcula:

a) ¿Cuántos moles de H_2SO_4 hay en 200 gramos de dicha sustancia?

b) ¿Cuántos moles de NaOH hay en 80 gramos de dicha sustancia?

c) ¿Cuántos moles de SO_2 hay en 130 gramos de dicha sustancia?

24. Calcula:

a) ¿Cuántas moléculas de CH_4 hay en 180 gramos?

b) ¿Cuántas moléculas de $CaCO_3$ hay en 300 gramos?

c) ¿Cuántas moléculas de Fe_2O_3 hay en 270 gramos?

25. ¿Cuántos gramos de SO_2 hay en 3 moles de dicho óxido?

26. Calcular los gramos de reactivos y productos que deben emplearse en la reacción química que se detalla a continuación, cuando la reacción química está ajustada. (Comprobar la ley de Lavoisier: masa de los reactivos = masa de productos).

$$NH_3 + O_2 \rightarrow N_2 + H_2O$$

27. Dada la siguiente reacción química: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$, calcula la cantidad de moles de H_2O que se pueden obtener a partir de 4 moles de O_2.

28. Sabiendo que el magnesio y el azufre reaccionan de acuerdo con la siguiente ecuación: $Mg + S \rightarrow MgS$. ¿Qué masa de magnesio reaccionará completamente con 32 gramos de azufre?

29. Indica cuántos gramos de ácido nítrico, HNO_3, son necesarios para reaccionar completamente con 5 moles de plata, según la reacción química cuya ecuación es:

$$Ag + HNO_3 \rightarrow NO_2 + AgNO_3 + H_2O$$

30. El ácido bromhídrico y el ácido sulfúrico reaccionan según la ecuación:

$$H_2SO_4 + 2\ HBr \rightarrow SO_2 + Br_2 + 2\ H_2O$$

Calcula la masa de HBr necesaria para que reaccionen con 3 moles de H_2SO_4.

31. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

- La *reacción de descomposición* es aquella en la cual, a partir de dos o más sustancias, se produce la formación de una nueva sustancia.
- Por ejemplo, cuando el hierro se combina con el oxígeno, produciendo óxido de hierro, estamos en presencia de una *reacción de neutralización*, ya que a partir de dos sustancias iniciales se obtiene un solo producto.
- En la *combustión del gas natural con el oxígeno*, las sustancias finales son hidrógeno y dióxido de carbono.
- En las *reacciones de síntesis* se produce la formación de dos o más sustancias como productos.

- En las *reacciones de neutralización*, reacciona un ácido y una base, para dar lugar a la formación de una sal y agua.

32. La Química ha realizado grandes aportes a la sociedad. Da un ejemplo de dichos aportes, en los siguientes sectores industriales: construcción, agrario, petroquímico, metalúrgico y farmacéutico.

SOLUCIONES

1. **Solución:**

   Podemos pensar en ejemplos cotidianos, como agua con azúcar, agua con sal, agua con alcohol, agua con dióxido de carbono, etc.

2. **Solución:**

$$\% \, \boldsymbol{masa\ pintura\ amarilla} = \frac{2{,}5\ g}{3\ g} \cdot 100 = \mathbf{75}\%$$

$$\% \, \boldsymbol{masa\ pintura\ negra} = \frac{0{,}75\ g}{3\ g} \cdot 100 = \mathbf{25}\%$$

3. **Solución:**

$$\boldsymbol{Concentración\ en\ masa\ (C)} = \frac{\boldsymbol{m_{soluto}}}{\boldsymbol{V_{disolución}}} = \frac{\mathbf{20\ g}}{\mathbf{0,2\ L}} = \mathbf{100\ g/L}$$

4. **Soluciones:**

   $V_{disolución}$ = 100 mL + 150 mL + 250 mL = 500 mL

$$\% \, Alcohol = \frac{100\ mL}{500\ mL} \cdot 100 = 20\% \, ; \% \, Acetona = \frac{150\ mL}{500\ mL} \cdot 100 = 30\%; \%$$

$$Agua = \frac{250\ mL}{500\ mL} \cdot 100 = 50\%$$

5. **Solución:**

   M_m (NaCl) = 23 + 35,45 = 58,45 u → Masa molar de NaCl = 58,45 g/mol.

$$n^{o}\ moles\ de\ NaCl = \frac{masa\ de\ NaCl}{Masa\ molar\ de\ NaCl} = \frac{30\ g}{58{,}45\,\frac{g}{mol}} = 0{,}51\ moles\ de\ NaCl$$

$$\boldsymbol{Molaridad\ (M)} = \frac{moles\ de\ soluto}{Volumen\ de\ disolución} = \frac{0{,}51\ moles}{0{,}25\ L} = \mathbf{2,04\ M}$$

6. **Solución:**

   La correcta es la d).

7. **Solución:**

   Datos: $V_1 = 10\ l$; $P_1 = 20\ atm$; $V_2 = 5\ l$.

   Como se ha producido un cambio de presión a temperatura constante en un gas, habrá que aplicar la *Ley de Boyle-Mariotte*.

$$\boldsymbol{P \cdot V = cte. \rightarrow P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{P_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{10 \cdot 20}{5} = \mathbf{40}\ \boldsymbol{atm}.$$

8. **Solución:**

   Datos: $V_1 = 1\ l$; $T_1 = 25\ ºC$; $T_2 = 65\ º\,C$.

   Con el aumento de la temperatura, las partículas que hay en su interior se mueven con mayor velocidad, con lo que chocan contra las paredes más veces y con mayor impulso (más fuerza), y eso hace que aumente el volumen del recipiente, si la presión externa del gas no cambia.

   Para calcular el nuevo volumen aplicaremos la *Ley de Charles*.

$$\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{cte.} \rightarrow \frac{\boldsymbol{V_1}}{\boldsymbol{T_1}} = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{T_2}}$$

Primero pasamos las temperaturas a Kelvin: $T_1 = 25 + 273 = 298\ K$; $T_2 = 65 + 273 = 338\ K$.

$$\boldsymbol{V_2} = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{1 \cdot 338}{298} = \mathbf{1{,}13}\ \boldsymbol{l}.$$

9. Solución:

Datos: $V = 5\ l$; $P_1 = 4\ atm$; $T_1 = 27\ ºC$; $T_2 = 127\ ºC$.

Debido a que se ha producido un cambio de temperatura a volumen constante en un gas, aplicaremos la *Ley de Gay-Lussac*.

Primero pasamos las temperaturas a Kelvin: $T_1 = 27 + 273 = 300\ K$; $T_2 = 127 + 273 = 400\ K$.

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{cte.} \rightarrow \frac{\boldsymbol{P_1}}{\boldsymbol{T_1}} = \frac{\boldsymbol{P_2}}{\boldsymbol{T_2}}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{P_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{4 \cdot 400}{300} = \mathbf{5{,}33}\ \boldsymbol{atm}.$$

10. Solución:

Datos: $V_1 = 10\ l$; $T_1 = 25\ º\ C$; $T_2 = 273\ K$.

Aplicaremos la *Ley de Charles*.

$$\boldsymbol{V_2} = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{10 \cdot 273}{298} = \mathbf{9{,}16}\ \boldsymbol{l}.$$

11. Solución:

Datos: $V_1 = 2\ dm^3 = 2\ l$; $P_1 = 80\ atm$; $P_2 = 1\ atm$.

Aplicaremos la *Ley de Boyle-Mariotte*.

$$\boldsymbol{V_2} = \frac{P_1 \cdot V_1}{P_2} = \frac{80 \cdot 2}{1} = \mathbf{160}\ \boldsymbol{l}.$$

12. Soluciones:

a) Cambio físico. La botella rota sigue siendo vidrio.
b) Cambio físico. La mantequilla al derretirse, sigue siendo mantequilla.
c) Cambio químico. En la fotosíntesis, las plantas producen oxígeno y nutrientes a partir de sustancias distintas.
d) Cambio físico. El balón de futbol en movimiento sigue siendo un balón.
e) Cambio químico. La ceniza que se crea en la hoguera es una sustancia distinta a la madera.

13. Soluciones:

a) Estado, físicos.
b) Químico, diferentes.
c) Reactivos, productos.
d) Reacción química, átomos.
e) Estequiométricos.
f) Mol, Avogadro.

14. Soluciones:

a) $CH_4 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

- Átomos de carbono: 1 = Átomos de carbono: 1 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 4 ≠ Átomos de hidrógeno: 2 (no ajustada)
- Átomos de oxígeno: 2 ≠ Átomos de oxígeno: 3 (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $CH_4 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O + CO_2$

- Átomos de carbono: 1 = Átomos de carbono: 1 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 4 = Átomos de hidrógeno: 4 (ajustada)
- Átomos de oxígeno: 2 ≠ Átomos de oxígeno: 4 (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow 2\ H_2O + CO_2$

- Átomos de carbono: 1 = Átomos de carbono: 1 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 4 = Átomos de hidrógeno: 4 (ajustada)
- Átomos de oxígeno: 4 = Átomos de oxígeno: 4 (ajustada)

La ecuación ajustada es: $\boldsymbol{CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow 2\ H_2O + CO_2}$

b) $HCl + Ca \rightarrow CaCl_2 + H_2$

- Átomos de hidrógeno: 1 ≠ Átomos de hidrógeno: 2 (no ajustada)
- Átomos de cloro: 1 ≠ Átomos de cloro: 2 (no ajustada)
- Átomos de calcio: 1 = Átomos de calcio: 1 (ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $2\ HCl + Ca \rightarrow CaCl_2 + H_2$

- Átomos de hidrógeno: 2 = Átomos de hidrógeno: 2 (ajustada)
- Átomos de cloro: 2 = Átomos de cloro: 2 (ajustada)
- Átomos de calcio: 1 = Átomos de calcio: 1 (ajustada)

La ecuación ajustada es: $\boldsymbol{2\ HCl + Ca \rightarrow CaCl_2 + H_2}$

c) $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

- Átomos de carbono: 2 ≠ Átomos de carbono: 1 (no ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 6 ≠ Átomos de hidrógeno: 2 (no ajustada)
- Átomos de oxígeno: 2 ≠ Átomos de oxígeno: 3 (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $C_2H_6 + O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + H_2O$

- Átomos de carbono: 2 = Átomos de carbono: 2 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 6 ≠ Átomos de hidrógeno: 2 (no ajustada)
- Átomos de oxígeno: 2 ≠ Átomos de oxígeno: 5 (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $C_2H_6 + O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + 3\ H_2O$

- Átomos de carbono: 2 = Átomos de carbono: 2 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 6 = Átomos de hidrógeno: 6 (ajustada)
- Átomos de oxígeno: 2 ≠ Átomos de oxígeno: 7 (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $C_2H_6 + 7/2\ O_2 \rightarrow 2\ CO_2 + 3\ H_2O$

- Átomos de carbono: 2 = Átomos de carbono: 2 (ajustada)
- Átomos de hidrógeno: 6 = Átomos de hidrógeno: 6 (ajustada)
- Átomos de oxígeno: 7 = Átomos de oxígeno: 7 (ajustada)

Ahora multiplicamos por 2 todos los miembros de la ecuación anterior, con los que la ecuación ajustada nos queda: ***$2\ C_2H_6 + 7\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 6\ H_2O$***

15. Soluciones:

Empecemos ajustando la ecuación química → $Mg_3B_2 + H_2O \rightarrow Mg(OH)_2 + B_2H_6$

- 3 átomos de Mg ≠ 1 átomo de Mg (no ajustada)
- 2 átomos de Br = 2 átomos de Br (ajustada)
- 2 átomos de H ≠ 8 átomos de H (no ajustada)
- 1 átomo de O ≠ 2 átomos de O (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $Mg_3B_2 + H_2O \rightarrow 3\ Mg(OH)_2 + B_2H_6$

- 3 átomos de Mg = 3 átomos de Mg (ajustada)
- 2 átomos de Br = 2 átomos de Br (ajustada)
- 2 átomos de H ≠ 12 átomos de H (no ajustada)
- 1 átomo de O ≠ 6 átomos de O (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $Mg_3B_2 + 6\ H_2O \rightarrow 3\ Mg(OH)_2 + B_2H_6$

- 3 átomos de Mg = 3 átomos de Mg (ajustada)
- 2 átomos de Br = 2 átomos de Br (ajustada)
- 12 átomos de H = 12 átomos de H (ajustada)
- 6 átomos de O = 6 átomos de O (ajustada)

La ecuación ajustada es: ***$Mg_3B_2 + 6\ H_2O \rightarrow 3\ Mg(OH)_2 + B_2H_6$***

16. Soluciones:

Empecemos ajustando la ecuación química → $HCl + Al_2O_3 \rightarrow AlCl_3 + H_2O$

- 1 átomo de H ≠ 2 átomos de H (no ajustada)
- 1 átomo de Cl ≠ 3 átomos de Cl (no ajustada)
- 2 átomos de Al ≠ 1 átomo de Al (no ajustada)
- 3 átomos de O ≠ 1 átomo de O (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $HCl + Al_2O_3 \rightarrow 2\ AlCl_3 + H_2O$

- 1 átomo de H ≠ 2 átomos de H (no ajustada)
- 1 átomo de Cl ≠ 6 átomos de Cl (no ajustada)
- 2 átomos de Al = 2 átomos de Al (ajustada)
- 3 átomos de O ≠ 1 átomo de O (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $6\ HCl + Al_2O_3 \rightarrow 2\ AlCl_3 + H_2O$

- 6 átomos de H ≠ 2 átomos de H (no ajustada)
- 6 átomos de Cl = 6 átomos de Cl (ajustada)
- 2 átomos de Al = 2 átomos de Al (ajustada)
- 3 átomos de O ≠ 1 átomo de O (no ajustada)

Planteamos la siguiente ecuación: $6\ HCl + Al_2O_3 \rightarrow 2\ AlCl_3 + 3H_2O$

- 6 átomos de H = 6 átomos de H (ajustada)

- 6 átomos de Cl = 6 átomos de Cl (ajustada)
- 2 átomos de Al = 2 átomos de Al (ajustada)
- 3 átomos de O = 3 átomos de O (ajustada)

La ecuación ajustada es: $\boldsymbol{6\ HCl + Al_2O_3 \rightarrow 2\ AlCl_3 + 3H_2O}$

17. Solución:

Empecemos ajustando la ecuación química que nos dan → $NH_3\,(g) + O_2 \rightarrow NO_2\ (g) + H_2O\ (l)$. Para ello asignaremos unos coeficientes a cada uno de los elementos de la ecuación, tanto a los reactivos como a los productos.

$$\mathbf{a}\ NH_3\,(g) + \mathbf{b}\ O_2 \rightarrow \mathbf{c}\ NO_2\ (g) + \mathbf{d}\ H_2O\ (l)$$

Ahora plantearemos varias ecuaciones con los coeficientes y los átomos de elementos tengamos en nuestra ecuación, relacionando de esta manera los reactivos con los productos.

$N \rightarrow a = c$

$H \rightarrow 3a = 2d$

$O \rightarrow 2b = 2c + d$

Ahora daremos un valor cualquiera a uno de los coeficientes, pero intentando que el valor dado simplifique la resolución de la ecuación (intentaremos que nos queden coeficientes enteros).

Si hago que $\boldsymbol{a = 2} \rightarrow \boldsymbol{c = 2} \rightarrow \boldsymbol{d = 3} \rightarrow 2b = 4 + 3 \rightarrow \boldsymbol{b = 7/2}$

Por tanto la ecuación nos queda: $2\ NH_3\,(g) + 7/2\ O_2 \rightarrow 2\ NO_2\ (g) + 3\ H_2O\ (l)$

Para evitarnos trabajar con fracciones, vamos a multiplicar toda la ecuación por 2 y quedará ya ajustada.

$$\boldsymbol{4\ NH_3\,(g) + 7\ O_2 \rightarrow 4\ NO_2\ (g) + 6\ H_2O\ (l)}$$

18. Solución:

Empecemos ajustando la ecuación química que nos dan → $NaCl + H_2O \rightarrow NaOH + Cl_2 + H_2$. Para ello asignaremos unos coeficientes a cada uno de los elementos de la ecuación, tanto a los reactivos como a los productos.

$$\mathbf{a}\ NaCl + \mathbf{b}\ H_2O \rightarrow \mathbf{c}\ NaOH + \mathbf{d}\ Cl_2 + \mathbf{e}\ H_2$$

$Na \rightarrow a = c$

$Cl \rightarrow a = 2d$

$H \rightarrow 2b = c + 2e$

$O \rightarrow b = c$

Ahora daremos un valor cualquiera a uno de los coeficientes, pero intentando que el valor dado simplifique la resolución de la ecuación (intentaremos que nos queden coeficientes enteros).

Si hago que $\boldsymbol{a = 2} \rightarrow \boldsymbol{c = 2} \rightarrow \boldsymbol{b = 2} \rightarrow 2 = 2d \rightarrow \boldsymbol{d = 1} \rightarrow 4 = 2 + 2e \rightarrow \boldsymbol{e = 1}$

Por tanto la ecuación ajustada nos queda: $\boldsymbol{2\ NaCl + 2\ H_2O \rightarrow 2\ NaOH + Cl_2 + H_2}$

19. Solución:

Empecemos ajustando la ecuación química que nos dan → $C_8H_8O_2 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. Para ello asignaremos unos coeficientes a cada uno de los elementos de la ecuación, tanto a los reactivos como a los productos.

$$\mathbf{a}\ C_8H_8O_2 + \mathbf{b}\ O_2 \rightarrow \mathbf{c}\ CO_2 + \mathbf{d}\ H_2O$$

$C \rightarrow 8a = c$

$H \rightarrow 8a = 2d$

$O \rightarrow 2a + 2b = 2c + d$

Ahora daremos un valor cualquiera a uno de los coeficientes, pero intentando que el valor dado simplifique la resolución de la ecuación (intentaremos que nos queden coeficientes enteros).

Si hago $\mathbf{c = 8} \rightarrow 8a = 8 \rightarrow \mathbf{a = 1} \rightarrow \mathbf{d = 4} \rightarrow 2 + 2b = 16 + 4 \rightarrow \mathbf{b = 9}$.

Por tanto la ecuación ajustada nos queda: $\mathbf{C_8H_8O_2 + 9\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 4\ H_2O}$.

20. Soluciones:

Antes de calcular las *masas moleculares*, debemos consultar en la tabla periódica los valores de las *unidades de masa atómica (uma)* de cada uno de los elementos de los compuestos químicos.

Datos: *H = 1 uma; S = 32 uma; O = 16 uma; Al = 27 uma; Fe = 56 ; uma; C = 12 uma*.

a) En el compuesto H_2O hay dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Por tanto, habrá que sumar la *masa atómica* (M_a) de cada átomo de hidrógeno (1 + 1) y la del oxígeno (16). En total su *masa molecular* será de *18 uma*. Ya que $1\ uma = 1{,}66.10^{-24}\ g$, en un mol de moléculas de H_2O habrá:

   $18 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} \approx 18$ g → **Masa molar de H_2O = 18g/mol**.

b) $Al(SO_4)_3$.

   2 átomos de aluminio: 27 · 2 = 54.

   3 átomos de azufre: 32 · 3 = 96.

   12 átomos de oxígeno: 12 · 16 = 184.

   Masa molecular: 54 + 96 + 184 = 342 uma.

   Masa molar: 342 g/mol.

c) CH_4.

   12 + 4 = 16.

   Masa molecular = 16 uma.

   ***Masa molar = 16g/mol**.*

d) H_2SO_4.

   (2 · 1) + 32 + (16 · 4) = 98.

   Masa molecular = 98 uma.

   Masa molar = 98 g/mol.

e) Fe_2O_3.

   (2· 56) + (3 · 16) = 160

   Masa molecular = 160 uma.

   Masa molar = 160 g/mol.

21. Soluciones:

Todas las respuestas a las preguntas que se nos hacen se pueden resolver con una simple regla de tres o planteando la fórmula:

Nº de moléculas = Nº de moles · Nº de Avogadro

a) Si en un mol hay → $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas

En 5 moles habrá → x moléculas.

***x** = 5 · 6,023 ·10^{23} = **30,12 ·10^{23} moléculas**.*

b) 1 mol → $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas

4 moles → x moléculas.

***x** = 4 · 6,023 ·10^{23} = **24,09 ·10^{23} moléculas**.*

c) 1 mol → $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas

3 moles → x moléculas.

***x** = 3 · 6,023 ·10^{23} = **18,07 ·10^{23} moléculas**.*

22. Soluciones:

a) Si un mol de SO_2 contiene $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas y su masa es de 64 gramos. La masa de 1 molécula es de: ***x** = 64 / 6,023 ·10^{23} = **10,62 ·10^{-23} gramos***.

b) Si un mol de $CaCO_3$ contiene $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas y su masa es de 100 gramos. La masa de 1 molécula es de: ***x** = 100 / 6,023 ·10^{23} = **16,60 ·10^{-23} gramos***.

c) Si un mol de Fe_2O_3 contiene $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas y su masa es de 160 gramos. La masa de 1 molécula es de: ***x** = 160 / 6,023 ·10^{23} = **26,56 ·10^{-23} gramos**.*

23. Soluciones:

Para calcular lo que se nos pide tenemos que tener en cuenta que:

Nº de moles = masa (g)/ masa molar (g/mol)

a) 1 mol de H_2SO_4 → 98 g

x moles → 200 g

***x** = 200 /98 = **2,04 moles de H_2SO_4**.*

Con la fórmula: ***x** = Nº de moles = masa (200 g)/ masa molar (98 g/mol) = **2,04 moles***.

b) 1 mol de *NaOH* (sosa) → 40 g

x moles → 80 g

***x** = 80 /40 = **2 moles de sosa**.*

Con la fórmula: *x = nº de moles = masa (80 g)/ masa molar (40 g/mol) = 2 moles*.

c) 1 mol de SO_2 → 64 g

x moles → 130 g

***x** = 130 /64 = **2,03 moles de SO_2**.*

Con la fórmula: ***x** = nº de moles = masa (130 g)/ masa molar (64 g/mol) = **2,03 moles***.

24. Soluciones:

Para resolver estas cuestiones:

- Primero hallamos los moles de cada sustancia que hay en los gramos que se indican.
- Segundo, una vez hallados los moles de cada sustancia ya podemos calcular las moléculas que hay de esa sustancia.

a) La masa molecular del CH_4 es: 12 + 4·1 = 16 uma → la masa de 1 mol de CH_4 es de 16g.

16 g → 1 mol de CH_4

180 g → X moles

X = 180 / 16 = 11,25 moles de CH_4

1 mol de CH_4 → 6,023 ·10^{23} moléculas de CH_4

11,25 moles → x

x *= 11,25 ·6,023 ·10^{23} =* ***67,76 ·10^{23} moléculas de CH_4.***

b) La masa molecular de $CaCO_3$ es: 40 + 12 + 16·3 = 100 uma → masa molar de $CaCO_3$ = 100g/mol.

$$\boldsymbol{x} = \frac{300\ g}{100 g/mol} \cdot \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\ moléculas}{1\ mol} = \mathbf{18,07 \cdot 10^{23}}\ \boldsymbol{moléculas\ de\ CaCO_3}$$

c) La masa molecular de Fe_2O_3 es: 56·2 + 16·3 = 160 uma → masa molecular de Fe_2O_3 = 160g/mol.

$$\boldsymbol{x} = \frac{270\ g}{160 g/mol} \cdot \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\ moléculas}{1\ mol} = \mathbf{10,16 \cdot 10^{23}}\ \boldsymbol{moléculas\ de\ Fe_2O_3}$$

25. Solución:

Masa molar del SO_2 = 64g/mol.

1 mol de SO_2 → 64 g

3 moles de SO_2 → x

x *= 3 · 64 =* ***192 g de SO_2.***

26. Soluciones:

La ecuación ajustada es: 4 NH_3 + 3 O_2 → 2 N_2 + 6 H_2O

Las masas molares de las sustancias que forman la reacción son:

NH_3: 17g/mol; O_2: 32g/mol; N_2: 28g/mol; H_2O: 18g/mol

Ahora calculemos los gramos que deben emplearse en la reacción:

NH_3*: Como son 4 moles, 4 ·17 =* ***68 g****.*

O_2*: Como son 3 moles: 3 ·32 =* ***96 g****.*

N_2*: Como son 2 moles: 2 ·28=* ***56 g****.*

H_2O*: Como son 6 moles: 6 ·18 =* ***108 g****.*

Según la *ley de Lavoisier*: *suma de masa de reactivos = suma de masa de productos*.

Masa de reactivos*: 68 + 96 =* ***164 gramos****.*

Masa de productos*: 56 + 108 =* ***164 gramos****.*

27. Solución:

A partir de la ecuación química podemos calcular el *factor molar* que relaciona los moles de H_2O y los moles de O_2.

$$relación\ molar = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ dada} = \frac{moles\ de\ H_2O}{moles\ de\ O_2} = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto, la cantidad necesaria de moles de H_2O será:

nº de moles de H_2O *= factor molar · nº de moles de O_2 = 2 · 4 =* ***8 moles de H_2O****.*

28. Solución:

En primer lugar debemos saber cuántos moles hay en 32 g de azufre (S). Masa atómica del azufre = 32 uma → 1 mol de azufre tiene una masa de 32 g.

Si miramos la reacción química nos damos cuenta que 1 mol de magnesio reacciona con 1 mol de azufre. Por tanto, esa será la cantidad de moles de magnesio que necesitaremos. Como la masa molar del magnesio es de 24g/mol, entonces necesitaremos **24 gramos de magnesio**.

29. Solución:

En primer lugar debemos ajustar la reacción. Vemos que en la parte de los productos hay dos átomos de nitrógeno, con lo que debemos poner un 2 delante del ácido nítrico (HNO_3). De esta forma la ecuación ya estaría ajustada.

$$Ag + 2\ HNO_3 \rightarrow NO_2 + AgNO_3 + H_2O$$

En la ecuación vemos que 1 mol de plata reacciona con 2 moles de ácido nítrico, entonces,

$$relación\ molar = \frac{moles\ de\ la\ sustancia\ deseada}{moles\ de\ la\ sustancia\ dada} = \frac{moles\ de\ HNO_3}{moles\ de\ Ag} = \frac{2}{1} = 2$$

nº de moles de HNO_3 *= factor molar · nº de moles de Ag = 2 · 5 =* ***10 moles de HNO_3****.*

Para calcular la masa en gramos, debemos conocer la masa molar del ácido nítrico.

La masa molecular del *HNO_3* = 1 + 14 + 16·3 = 63 uma → Masa molar del *HNO_3* = 63g/mol.

Masa de HNO_3 *= nº de moles · masa molar = 10 ·63 =* ***630 g****.*

30. Solución:

Masa molar de *HBr* = 81 g/mol → 2 moles de HBr = 162 g de HBr.

1 mol de *H_2SO_4* → 162 g de *HBr*

3 moles de *H_2SO_4* → masa de *HBr*

$$\boldsymbol{Masa\ de\ HBr} = \frac{3\ moles\ de\ H_2SO_4 \cdot 162\ g\ de\ HBr}{1\ mol\ de\ H_2SO_4} = \boldsymbol{486\ g\ de\ HBr}$$

31. Soluciones:

F, F, F, F, V.

32. Soluciones:

- Sector de la construcción:

  La utilización de nuevos materiales para la construcción, como el *hormigón*, ha permitido y facilitado la creación de obras cada vez más grandes, seguras y resistentes. El descubrimiento de los *materiales cerámicos* supuso un gran avance en la construcción de viviendas y edificios. Uno de los materiales más importantes y que ha cambiado nuestra manera de vivir es el *plástico*. Es un material liviano, fácil de moldear por lo que se puede hacer prácticamente cualquier cosa con él.

- Sector agrario:

La utilización de *pesticidas*, *fertilizantes* y *herbicidas* ha permitido al hombre mejorar sus cosechas y aumentar la producción de alimentos, librándole de los efectos adversos de diversas plagas.

- Sector petroquímico:

  La química ha hecho posible la creación de los *combustibles* que hoy día usamos para mover maquinarias, nuestros vehículos, aviones etc. Adicionalmente, los *aceites* que estas máquinas utilizan para funcionar, provienen de derivados del *petróleo*.

- Sector de la metalurgia:

  La química ha permitido la creación de *aleaciones de metales* para mejorar las características de otros metales ya existentes. La aleación del cobre con el zinc produce el *latón*. Esta y otras combinaciones de metales han sido muy útiles, no solo en la creación de aleaciones con propiedades físicas muy diversas, sino en la industria de la ingeniería. Por ejemplo, a partir del hierro y carbono se obtiene el *acero*, que es uno de los metales más utilizados para la fabricación de objetos.

- Sector farmacéutico:

  La humanidad ha sido afectada en muchas etapas de su vida por enfermedades que han acabado con gran parte de la población. La química ha hecho su papel de disciplina salvadora en la elaboración de *medicinas*, *antibióticos* y *vacunas*, como un auxiliar de la medicina y la biología, para superar esas etapas de gran mortalidad. Por ejemplo, los *medicamentos* prolongan nuestra vida y nos ayudan a combatir enfermedades.

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 11: GENÉTICA. SALUD. PROBABILIDAD.

TEMA 3. GENÉTICA CELULAR.

1. LA CÉLULA.

La **célula** es la unidad *anatómica* y *funcional* de todo organismo o ser vivo, ya que todos los seres vivos estamos constituidos por *células*. Es la unidad de vida más pequeña.

La *célula* y su estructura no se pudieron conocer hasta que no se crearon los *microscopios*. Todas las observaciones realizadas llevaron a enunciar la **teoría celular**, que se fundamenta en los siguientes principios básicos:

- Todo ser vivo está formado por una o más *células*.
- Cada *célula* contiene las estructuras necesarias para su funcionamiento, no necesita estructuras externas a ella.
- Las **funciones vitales** de los seres vivos (*nutrición*, *relación* y *reproducción*) ocurren dentro de las *células*, o en su entorno inmediato.
- Cada *célula* proviene de la división de otra célula anterior.
- Cada *célula* contiene toda la información hereditaria necesaria para el control de su propio desarrollo y funcionamiento, y esta información será transmitida desde la **célula madre** a las **células hijas**.

Atendiendo al grado de complejidad que presentan en su estructura, las células se clasifican en *procariotas* y *eucariotas*.

La **célula procariota** es la célula más primitiva, por lo que es el tipo de célula más sencilla. Se caracteriza por no poseer un núcleo diferenciado, rodeado por una membrana. En ella, el *material genético (ADN)* se encuentra disperso por el citoplasma, que no está compartimentado. Prácticamente todos los organismos basados en *células procariotas* son *unicelulares*.

La **célula eucariota** sí tiene un núcleo protegido por una membrana, dentro del cual se encuentra el *material genético (ADN)*. En ella, el citoplasma está compartimentado. La mayor parte de las células son *eucariotas*, como las células humanas, la de los animales y de las plantas verdes, y en ellas podemos distinguir principalmente las siguientes partes: *membrana plasmática*, *citoplasma* y *núcleo*. Es el tipo de célula más compleja.

A los organismos o seres vivos que están formados por una sola célula se les denominan **unicelulares** y aquellos que están formados muchas células se les denominan **pluricelulares**.

En un *organismo pluricelular* existen dos tipos de células: *células somáticas* y *células germinales o sexuales*. Tanto unas como otras proceden de **células madre** originadas durante el desarrollo embrionario.

Las **células somáticas** constituyen la mayoría de las células del cuerpo de un *organismo pluricelular*, por lo tanto, se encuentran en los huesos, la piel, los tejidos, los órganos o la sangre.

Las *células somáticas* son células **diploides (2n)**, contienen toda la información genética de un individuo, organizada en 23 pares de cromosoma, 23 proceden de la madre (óvulo) y 23 del padre (espermatozoide). La función principal de las *células somáticas* es la renovación y crecimiento de los tejidos y órganos de un ser vivo pluricelular.

Las **células germinales** o **sexuales** son las responsables de la formación de las **células reproductoras** o **gametos**, los *espermatozoides* en los hombres y los *óvulos* en las mujeres.

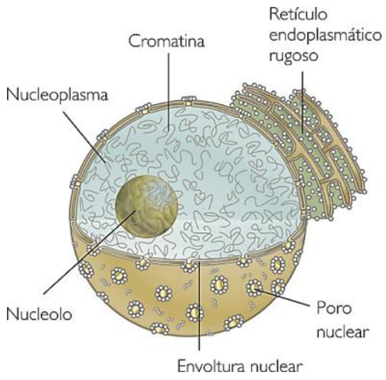
Los *gametos* son células **haploides (n),** contienen la mitad de la información genética de un individuo, organizada en 23 cromosomas. Las *células germinales* están situadas en las **gónadas** de los aparatos reproductores femenino y masculino (*testículos* y *ovarios*). La función principal de las *células germinales* es la formación de los *gametos*.

1.1. CÉLULA EUCARIOTA.

La **célula eucariota** tiene un *núcleo* rodeado por una membrana, dentro del cual se encuentra el *material genético (ADN)*. Las *células eucariotas* están constituidas por tres estructuras básicas: la *membrana plasmática*, el *citoplasma* y el *núcleo*.

- **Membrana plasmática**. Separa a la célula del medio que la rodea. A través de sus poros se produce el intercambio de sustancias entre el interior y el exterior.
- **Citoplasma**. Medio interno de la célula donde sucede el *metabolismo celular* gracias a los *orgánulos*:
    - **Mitocondria**. Producen la mayor parte de la energía que necesita la célula, mediante procesos de oxidación de materia orgánica. Para ello, utiliza oxígeno y libera dióxido de carbono. Este proceso se denomina *respiración celular*.
    - **Centriolos**. Son unas estructuras formadas por microtúbulos que intervienen en la división celular.
    - **Ribosomas**. Son los que realizan la fabricación (síntesis) de las proteínas según las órdenes que reciben de los *ácidos nucleicos*.
    - **Aparato de Golgi**. Orgánulo membranoso formado por la agrupación de sacos aplanados y vesículas. Se encarga de la preparación y secreción de sustancias Modifica proteínas y lípidos para enviarlos al exterior de la célula (*secreción celular*).
    - **Retículo endoplasmático**. Sistema de membranas que forman una red completa de túbulos y sacos que se conectan con la membrana nuclear. Puede encontrarse libre (*retículo endoplasmático liso*) o con ribosomas adheridos (*retículo endoplasmático rugoso*). Entre sus funciones están el transporte y almacenamiento de sustancias, la fabricación de sustancias y la destrucción de sustancias tóxicas.
    - **Lisosomas**. Son pequeñas vesículas ("saquitos") membranosas de forma esférica, producidas por el Aparato de Golgi, que contienen enzimas digestivas que transforman moléculas complejas en otras más sencillas. Intervienen en el proceso digestivo de la célula (*digestión celular*).
    - **Vacuolas**. Son vesículas membranosas de tamaño y forma variables, Se encargan de acumular sustancias de reserva o deshecho.

- **<u>Núcleo</u>**. Es el responsable de controlar las funciones celulares. Dirige toda la actividad de la célula. Está protegido mediante una membrana doble porosa, la *membrana nuclear*, que permite el intercambio de sustancias con el resto de la célula a través de los *poros nucleares*. El *ADN*, que se encuentra unido a *proteínas,* recibe el nombre de **cromatina** y contiene la información genética en su estructura. La *cromatina* se encuentra repartida de forma difusa por todo el *núcleo*, constituyendo una masa de aspecto filamentoso. Al iniciarse la división celular, la *cromatina* adquiere una estructura definida y da lugar a los **cromosomas**. En el *núcleo* podemos distinguir los siguientes elementos:

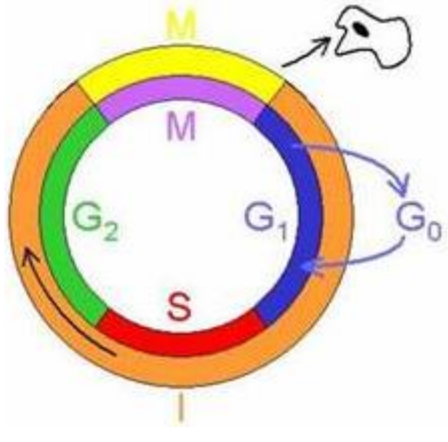


    - **Membrana nuclear**. Es la que envuelve al núcleo y lo separa del citoplasma.
    - **Nucleoplasma**. Es el medio interno del núcleo, es viscoso e incoloro. En él se encuentra inmerso el *ADN*, el *ARN*, agua, sales y muchas proteínas.
    - **Cromatina** y **cromosomas**. Cuando la célula no está dividiéndose, el *ADN (ácido desoxirribonucleico)* aparece como una fibra de 300 nm, llamada **cromatina**. Cuando la célula va a dividirse la *cromatina* se condensa y forma los **cromosomas**. Los *cromosomas* son estructuras individuales de ADN enrollado y empaquetado que son portadores del material genético del individuo.
    - **Nucléolos**. Orgánulo en el interior del núcleo de una célula que se compone de *ARN (ácido ribonucleico)* y proteínas .Es el lugar donde se forman los *ribosomas*, los cuales ayudan a unir los aminoácidos para formar proteínas.

2. EL CICLO CELULAR. PROCESOS DE DIVISIÓN CELULAR.

El **ciclo celular** es el conjunto de cambios que sufre una célula desde su formación, a partir de una *división celular*, hasta que se divide para dar origen a dos células nuevas. Tiene distinta duración entre las células de diferentes seres vivos, incluso entre células del mismo ser vivo.

El *ciclo celular* se inicia en el instante en que aparece una nueva célula, descendiente de otra que se ha dividido, y termina en el momento en que dicha célula, por *división celular*, origina nuevas *células hijas*.



El *ciclo celular* es la base para la reproducción de los organismos. Su función no es solamente originar nuevas células sino asegurar que el proceso se realice en forma debida y con la regulación adecuada (con controles internos para evitar la posible creación de células con múltiples errores).

El *ciclo celular* comprende dos periodos: la **interfase** (etapas G_1, S y G_2) y la **división celular** (etapa M). Esta última tiene lugar por **mitosis** o **meiosis**.

La **interfase** es el período comprendido entre divisiones celulares. Es la fase más larga del ciclo celular, ocupando casi el 90 por ciento del ciclo, y se divide en tres subetapas: G_1, S y G_2.

- **Fase G_1 (intervalo 1)**: En esta fase la célula aumenta de tamaño, sintetiza proteínas y ARN y organiza sus orgánulos y estructuras. Tiene una duración de entre 6 y 12 horas, y durante este tiempo la célula duplica su tamaño y masa.
- **Fase S (Síntesis)**: En ella se produce la replicación o duplicación del ADN y proteínas asociadas, como resultado cada *cromosoma* se duplica y queda formado por dos *cromátidas* idénticas. Tiene una duración de unos 6 - 8 horas.
- **Fase G_2 (intervalo 2)**: La célula se prepara para la división celular almacenando energía y materia. Se duplican los *centriolos*. Tiene una duración entre 3 y 4 horas. Termina cuando la *cromatina* en el núcleo empieza a condensarse, lo que indica el inicio de la *división celular*.

En la **división celular (fase M)** se reparte el material genético (donde se divide la *cromatina* duplicada de modo tal que cada célula hija obtenga una copia del material genético) y se produce la *citocinesis* (división del citoplasma). Si el ciclo completo dura 24 horas, la fase *M* dura alrededor de media hora (30 minutos).

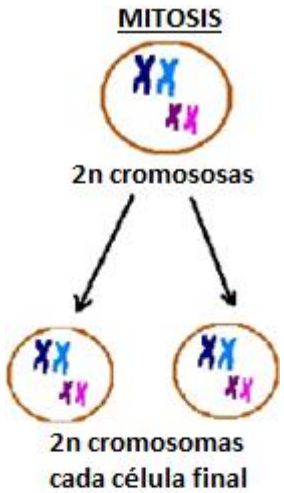
El final de la *división celular* da lugar a un nuevo ciclo donde la célula entre en la *fase* G_1 o puede que la célula entre en **fase G_0**, que corresponde a un estado de reposo especial característico de algunas células.

La **mitosis** es el tipo de *división celular* de las *células somáticas*, a partir de una *célula madre diploide* se originan dos *células hijas* con la misma cantidad de cromosomas y material genético.

La **meiosis** es el tipo de *división celular* de las *células germinales*. A partir de una *célula madre diploide* se originan cuatro *células hijas haploides* (con la mitad de los cromosomas). La *meiosis* se utiliza para producir *gametos* masculinos y femeninos. Ocurre en organismos sexuales y equivale a dos *mitosis* consecutivas sin duplicación del material genético entre las dos *mitosis*. A diferencia de la *mitosis* el proceso de *meiosis* comienza cuando se alcanza la madurez sexual.

2.1. MITOSIS.

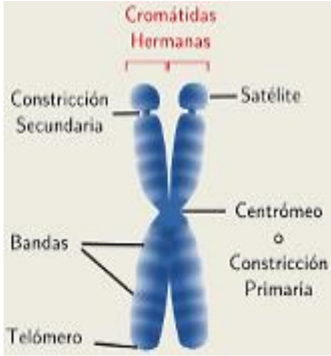
Es el proceso por el cual a partir de una **célula madre** se originan dos **células hijas** idénticas genéticamente a la madre. La *célula madre* duplica su información genética y la reparte en dos núcleos. De esta forma se crean dos *células hijas* genéticamente idénticas entre sí e idénticas a la *célula madre*. Las células se dividen por *mitosis* para dar células genéticamente iguales a sus predecesoras. Las *células eucariotas* se dividen habitualmente por *mitosis*.



La *mitosis* es un tipo de *división celular* de tipo **asexual** (no hay mezcla de material genético de dos células distintas) necesaria para:

- **Reproducción de muchos seres unicelulares**. En los organismos unicelulares, la *mitosis* es un mecanismo de *reproducción asexual* que permite aumentar el número de individuos, que son idénticos al progenitor.

- **Desarrollo y crecimiento de organismos pluricelulares**. En nuestro organismo las divisiones celulares son muy numerosas en la fase de crecimiento. Aumentamos de tamaño gracias a que nuestro cuerpo va teniendo cada vez más y más células. En los organismos pluricelulares, la *mitosis* supone el crecimiento del individuo por sucesivas divisiones a partir de una célula única, el *cigoto*. Pero cuando alcanzamos el tamaño definitivo, las divisiones no son tan frecuentes, solamente las justas para producir células nuevas que reemplacen a las muertas o lesionadas.

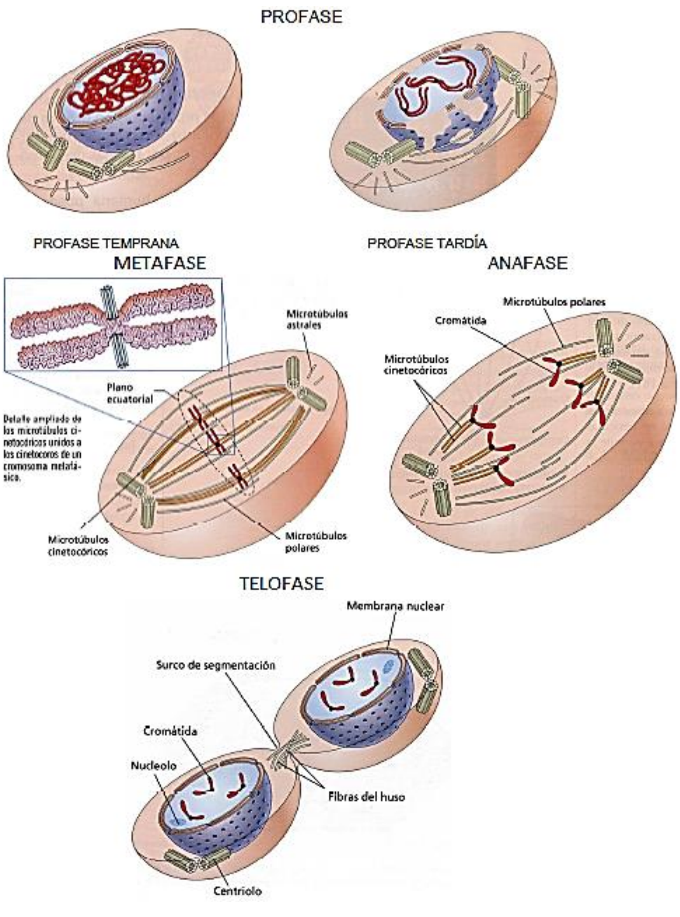


Cada *mitosis* está precedida por una **interfase**, durante la cual la célula **duplica sus moléculas de ADN**, quedando formado cada **cromosoma** por dos copias idénticas de esta molécula, llamadas **cromátidas hermanas**, que se unen por un punto llamado **centrómero**. Esto asegura que las dos *células hijas* obtengan exactamente la misma información genética de la célula madre. También se duplican los *centriolos* si la célula es animal.

En las células eucariotas, la *división celular* comprende dos procesos: **división del núcleo** o **cariocinesis** (*mitosis*) y **división del citoplasma** o **citocinesis**.

<u>Mitosis o división del núcleo</u>

Aunque la *mitosis* es un proceso continuo, para facilitar su estudio se puede dividir en cuatro fases:



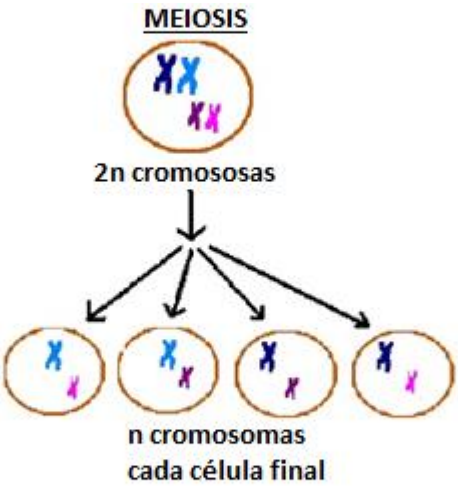
1. **Profase**: Durante esta fase el *centriolo* de la célula se duplica y cada uno se dirige a uno de los polos de la célula. La *cromatina* se condensa y se forman los *cromosomas*, se hacen visibles sus estructuras dobles. La membrana nuclear desaparece y se comienza a formar el *huso acromático* (*citoesqueleto* formado por *microtúbulos*).
2. **Metafase**: Aparece el *huso acromático*. Los cromosomas totalmente condensados se dirigen hacia el *plano ecuatorial* de la célula, uniéndose cada uno a un *filamento* del *huso acromático* por el *centrómero*.
3. **Anafase**: Las *cromátidas hermanas* de cada cromosoma son divididas y dirigidas por los *filamentos* del *huso acromático* hacia los polos opuestos de la célula.

4. **Telofase**: Llegan los cromosomas a los polos, se comienza a formar la *membrana nuclear* alrededor de los cromosomas. Desaparece el *huso acromático* y los *cromosomas* se desenrollan para constituir de nuevo la *cromatina* y ya no se pueden distinguir entre sí. La célula empieza mostrar en la *membrana celular* síntomas de división.

Citocinesis o división del citoplasma

Una vez concluida la *división del núcleo* tiene lugar la *división del citoplasma*: el citoplasma de la célula se divide de forma igual entre las células hijas, la membrana celular se divide y resulta dos células genéticamente iguales y con la mitad del material citoplasmático de su progenitor. El proceso ocurre de forma diferente en células animales y vegetales.

En las *células animales* se realiza por estrangulación del citoplasma a nivel del ecuador de la célula. Y en las *células vegetales* se forma entre las células hijas un tabique de separación denominado *fragmoplasto*.



2.2. MEIOSIS.

Las células de los *órganos reproductores* (ovarios y testículos) experimentan un tipo especial de división celular denominado **Meiosis**. Por el proceso de *Meiosis* se originan **cuatro células con la mitad de cromosomas** que cualquier otra célula del organismo. Estas células reciben el nombre de *gametos* y son portadoras de la información genética de los progenitores.

La *meiosis* es un sistema de **reproducción sexual** y lo utilizan los organismos eucariotas para formar descendientes diferentes a los padres. En los vertebrados o animales, la *meiosis* tiene lugar en las **gónadas** y las células que se forman son los **gametos**.

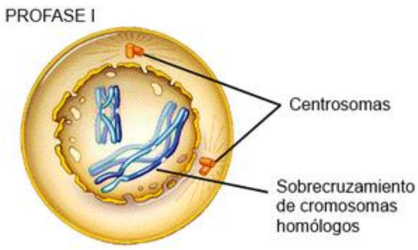
Los **gametos masculinos** se llaman **espermatozoides** y los **gametos femeninos**, **óvulos**. Al tener la mitad de información genética que una célula normal, cuando se juntan un *óvulo* y un *espermatozoide* forman una nueva célula que tiene la cantidad normal de información genética. La unión de gametos recibe el nombre de **fecundación**. La célula formada se llama **cigoto**.

Cuando las células se dividen por *meiosis* originan células con la mitad de información genética que sus predecesoras. Este avance evolutivo permite que aparezcan seres variados genéticamente, que pueden resultar mejor o peor adaptados que sus progenitores al medio ambiente en el que se desarrollan.

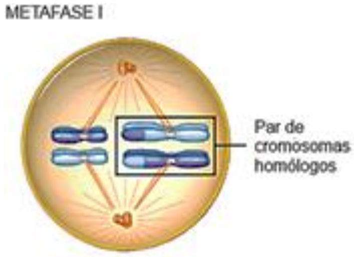
Durante la *meiosis* se producen dos **divisiones nucleares** sucesivas, denominadas *primera división meiótica* y *segunda división meiótica*. Cada una de ellas se divide en cuatro fases que reciben el nombre de **profase**, **metafase**, **anafase** y **telofase**. Por lo que al final se forman cuatro *células hijas*, genéticamente diferentes entre sí y distintas a la célula madre.

Antes de iniciarse la primera división meiótica tiene lugar un período de **interfase** en el que se **duplica el ADN**.

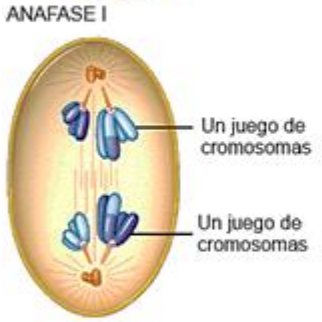
Primera división meiótica



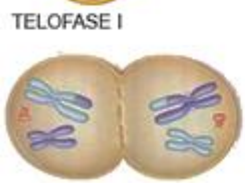
- **Profase I**: La *cromatina* se condensa formando cromosomas hasta hacerlos visibles. Los *cromosomas homólogos* (de una misma pareja) se juntan produciendo un emparejamiento en el que se produce intercambio de información genética (se intercambian fragmentos de ADN). Este proceso se conoce como **sobrecruzamiento**, y asegura que las células hijas sean genéticamente distintas a la célula madre. A nivel citoplásmico se ha formado el *huso acromático* a partir de los *microtúbulos* que salen de las regiones polares, en las que se encuentra las parejas de *centriolos*, una en cada polo celular.



- **Metafase I**: Los *cromosomas homólogos* se disponen por parejas en el ecuador de la célula. Se origina la *placa ecuatorial* por la unión de los cromosomas homólogos a los *microtúbulos* del *huso acromático*.



- **Anafase I**: Arrastrados por los *filamentos del huso acromático*, los *cromosomas homólogos* se separan y se dirigen a polos opuestos de la célula. En cada polo aparece la mitad de cromosomas.

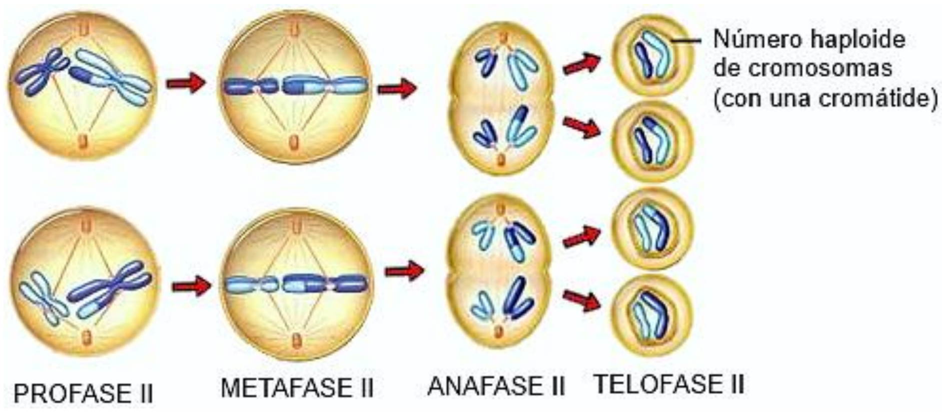


- **Telofase I y citocinesis**: Los cromosomas alcanzan los polos celulares. En torno a ellos se forma la membrana y aparece el *nucleolo*. Generalmente se produce una *citocinesis*, que conlleva un reparto de citoplasma, que en muchos casos no es equitativo. Se forman dos *células hijas*, con la mitad de cromosomas que la célula madre.

Segunda división meiótica

Entre la primera y la segunda división **no se produce duplicación de ADN**.

- **Profase II**: Sin pasar por un período de **interfase**, los cromosomas vuelven a condensarse, con sus dos cromátidas diferentes, resultado de la recombinación genética producida por el **sobrecruzamiento**. Desaparece el *nucleolo* y la *membrana nuclear* y los cromosomas se adhieren a los *microtúbulos* del nuevo *huso acromático*.
- **Metafase II**: Los cromosomas se disponen en el ecuador de la célula.
- **Anafase II**: Las *cromátidas* de



cada cromosoma se separan y cada una se dirige hacia un extremo de la célula (polo).

- **Telofase II y citocinesis**: Se organiza una *membrana nuclear* alrededor de los cromosomas que se van desenrollando. Aparece el *nucleolo* y se reparte el contenido del citoplasma mediante una *citocinesis*. Se obtienen cuatro células hijas distintas, cada una con la mitad de cromosomas que la *célula madre*.

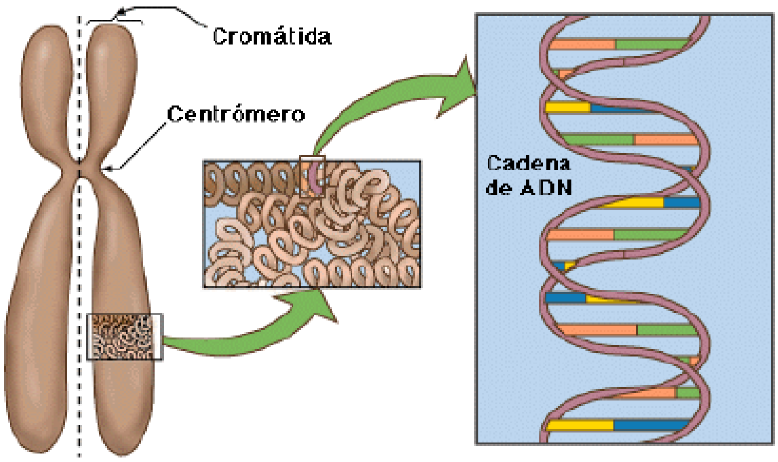
3. EL ESTUDIO DEL ADN.

3.1. LOS CROMOSOMAS.

El **ADN** o **ácido desoxirribonucleico** es una molécula que se encuentra en el núcleo de una célula, y contiene su *información genética* en su estructura.

Cuando la célula no se está dividiendo, el *ADN* se encuentra asociado a proteínas, disperso en el *nucleoplasma*, formando una especie de ovillo. En ese estado se llama **cromatina**.

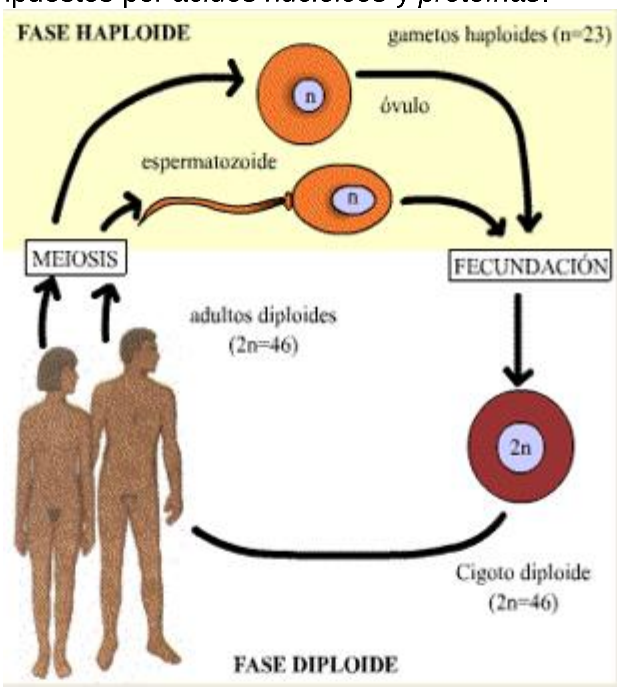
Cuando una célula va a dividirse, el *ADN* se duplica y forma dos copias idénticas, se espiraliza, es decir, se enrolla cientos de veces y se condensa, formando los **cromosomas**.



Cada *cromosoma* está formado por las dos copias de *ADN*, las **cromátidas**, que se unen en un punto denominado **centrómero**. El *centrómero* divide a las *cromátidas* en dos partes que se denominan **brazos**.

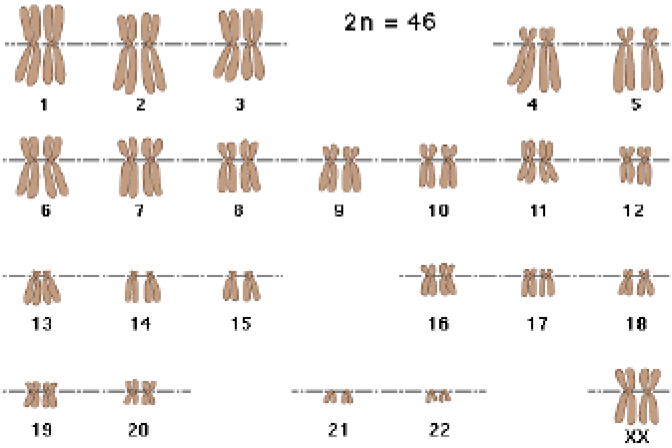
Los *cromosomas* son un componente del *núcleo celular* que sólo aparecen cuando la célula está en división (*mitosis* o *meiosis*) y que están compuestos por *ácidos nucleicos* y *proteínas*.

Los *cromosomas* varían en número y forma entre los seres vivos. El ratón tiene 40, la patata 48, la cebolla 16, el gato 8 y los seres humanos tenemos **46 (23 pares)**. Todos los seres vivos de la misma especie tienen el mismo número de cromosomas en cada una de sus células, excepto en las *células reproductoras* o *gametos* que poseen la mitad.



Los **gametos** tienen una sola dotación de cromosomas (**células haploides "n"**), todas las demás células, llamadas **células somáticas**, tiene dos dotaciones de cromosomas, un juego de cromosomas materno y otro paterno (**células**

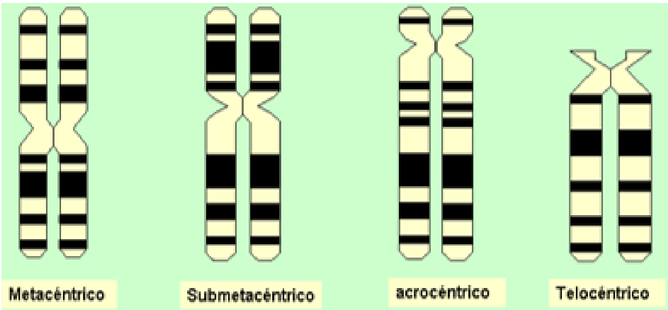
diploides "2n"). Los cromosomas que forman cada pareja, tienen la misma forma y tamaño y proporcionan información sobre los mismos caracteres, se denominan **cromosomas homólogos.** El **cariotipo** es la representación de los cromosomas de una especie. En él se ve el número, el tamaño y la forma de los *cromosomas metafásicos* de un determinado organismo.



En el caso de los seres humanos, el *cariotipo* muestra 22 parejas de cromosomas que son iguales en ambos sexos (**autosomas**), y dos *cromosomas sexuales* (**heterocromosomas**), llamados XX para la mujer y XY para el hombre.

Los cromosomas se clasifican atendiendo a su **morfología** en:

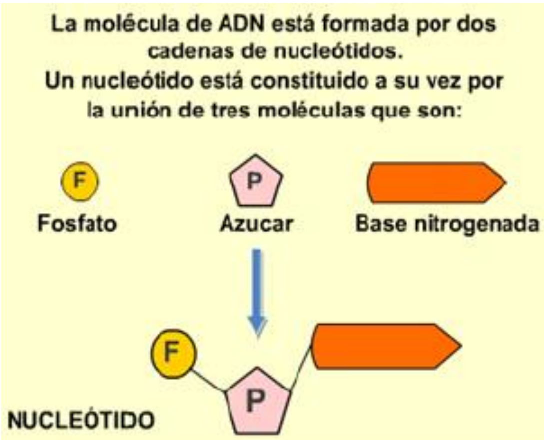
a) **Metacéntricos**, los dos brazos iguales.
b) **Submetacéntricos**, un brazo es ligeramente más corto que el otro.
c) **Acrocéntricos**, un brazo es mucho más grande que el otro.
d) **Telocéntrico**: sólo se aprecia un brazo del cromosoma al estar el centrómero en el extremo.



3.2. COMPOSICIÓN Y ESTRUCTURA DEL ADN.

La **molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico)** está formada por la unión de dos larguísimas cadenas de pequeñas moléculas llamadas **nucleótidos**. En el *ADN* sólo existen cuatro tipos de *nucleótidos* distintos, diferenciándose solamente en uno de sus componentes, las llamadas **bases nitrogenadas**:

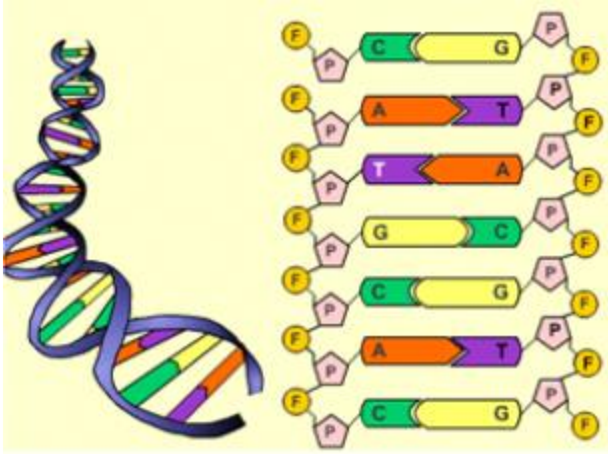
- **ADENINA = A**
- **CITOSINA = C**
- **GUANINA = G**
- **TIMINA = T**



Estas *bases*, en la *molécula de ADN* se encuentran emparejadas: la **adenina (A)** es capaz de unirse con la **timina (T)** y la **guanina (G)** siempre se empareja con la **citosina (C)**, formando una estructura similar a los peldaños de una escalera.

Como siempre se emparejan unas *bases* con otras, conociendo la secuencia de *bases* de una hilera se puede saber la otra. De esta forma el *ADN* se organiza en dos hebras paralelas y complementarias que a su vez se enrollan formando una "**doble hélice**" o *escalera de caracol*.

La estructura fue descubierta por **James Watson** y **Francis Crick** y les valió el Premio Nobel de Biología (1962).



En la figura se puede observar un *fragmento de ADN*, que es la materia que constituye los **genes**. Su secuencia de *nucleótidos* contiene la información necesaria para poder controlar el metabolismo de un ser vivo. El *ADN* es el lugar donde reside la información genética de un ser vivo.

3.3. LA IMPORTANCIA DEL ADN.

Hoy en día, todos oímos hablar más o menos a menudo del *ADN* (por ejemplo, en programas informativos o series de televisión). Esto nos da idea de su importancia en el mundo actual.

El conocimiento completo del *ADN* ha abierto una nueva ciencia, la **Biotecnología** con un alcance aún insospechado. Entre las diferentes aplicaciones de su conocimiento se encuentran:

- La *tecnología del ADN recombinante* que permite la transferencia de genes a bacterias.
- La *terapia génica*, que trata enfermedades hasta ahora imposibles de curar.
- La obtención de *organismos transgénicos*, animales y vegetales.
- La realización del *Proyecto Genoma Humano*, con la localización de todos los genes.

4. EL ARN.

El **ARN** o **ácido ribonucleico** es una molécula que, al igual que el ADN, se compone de una sucesión de nucleótidos unidos entre sí, formando una cadena simple. Está presente tanto en las *células procariotas* como en las *eucariotas*, y es el único material genético de ciertos virus. Tiene similitudes estructurales con el ADN, aunque a diferencia del ADN, el *ARN* esté formado por una única cadena.

Tanto el **ARN** como el **ADN** forman parte del grupo de los **ácidos nucleicos**. Las funciones de cada uno están determinadas por la composición química y su estructura.

Algunas de las diferencias que existen entre el ARN y el ADN son las siguientes:

- El ADN es una molécula de *cadena doble* y el ARN de *cadena simple*.
- El *azúcar* que los compone es diferente. En el ADN es la **desoxirribosa** y en el ARN la **ribosa**.
- Las *bases nitrogenadas* del ARN son: **Adenina (A)**, **Citosina (C)**, **Guanina (G)** y **Uracilo (U)**. Este último sustituye a la *Timina (T)* del ADN.

Mientras que el ADN se encuentra en el núcleo de las células eucariotas o en el interior de las *mitocondrias* (*ADN mitocondrial*), el ARN puede encontrarse en diferentes partes de la célula. Por lo general, se sintetiza en el núcleo y de ahí va al citoplasma. Todos los ARN se forman a partir del ADN, tomando una parte de él como molde. Este hecho hace que ambos sean **complementarios**.

El ADN contiene la información genética. Es la molécula encargada de transmitir a la descendencia las "instrucciones" necesarias para construir todas las proteínas presentes en un ser vivo. Para ello, tiene la capacidad de realizar copias de sí mismo mediante un mecanismo conocido como replicación.

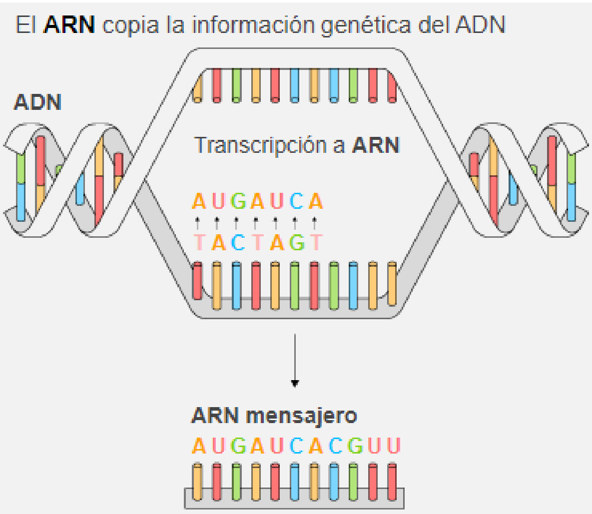
Por su parte, el ARN dirige la **síntesis de proteínas** a partir de la información obtenida del ADN.

4.1. TRANSCRIPCIÓN DEL ADN. SÍNTESIS DE PROTEÍNAS O TRADUCCIÓN DEL ARN.

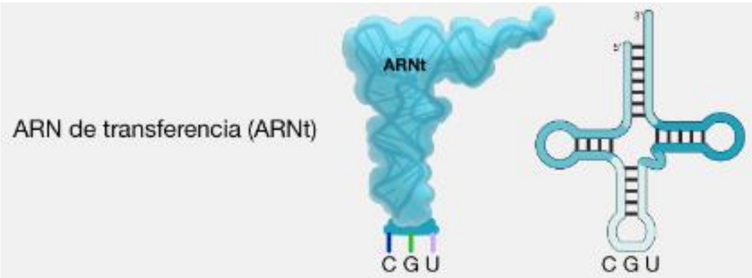
En la mayoría de los organismos, seres humanos incluidos, la **función del ARN** es **copiar la información del ADN**, de tal forma que sea posible su expresión en *proteínas*, los elementos funcionales de nuestro organismo.

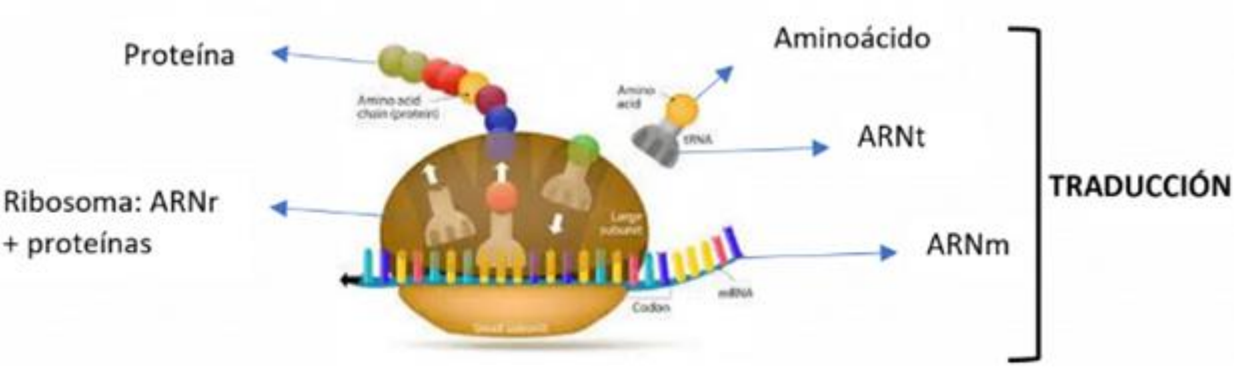
Es importante recordar la **complementariedad** que existe de pares de bases en los *ácidos nucleicos*. Gracias a esa *complementariedad* es posible que la célula mantenga la misma información genética independientemente de la molécula que use para expresarla: ADN o ARN.

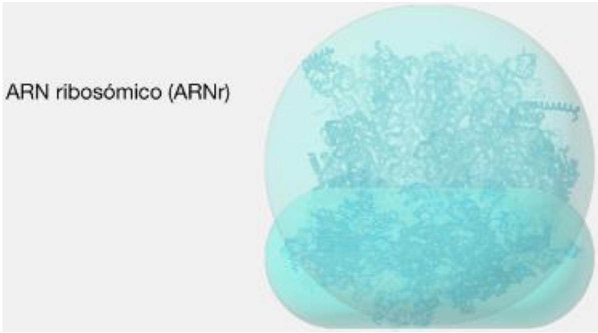
Existen diferentes tipos de ARN en las células, aunque éstos tienen la misma composición, pero diferente estructura y función específica: **ARN mensajero (ARNm)**, **ARN de transferencia (ARNt)** y **ARN ribosómico (ARNr)**.



- **ARN mensajero (ARNm)**: Se sintetiza en el núcleo de la célula a partir del ADN. Su función es copiar fragmentos del ADN para sacar dicha información fuera del núcleo y llevarla a los *ribosomas*, donde siguiendo las instrucciones contenida en la información genética del ADN, servirá para producir proteínas. El *ARNm* es la molécula, en forma de cadena simple, que resulta del **proceso de la transcripción**.
- **ARN de transferencia (ARNt)**: Tienen una estructura peculiar con forma de trébol. Su función es transportar *aminoácidos específicos* hasta los *ribosomas* para conseguir completar ese **proceso de traducción.** Cada *codón* de un *ARNm*, formado por tres nucleótidos, es reconocido por un *ARNt* concreto que va acompañado de un *aminoácido*. Finalmente, los aminoácidos se van uniendo formando la estructura primaria de las **proteínas** en los *ribosomas*.







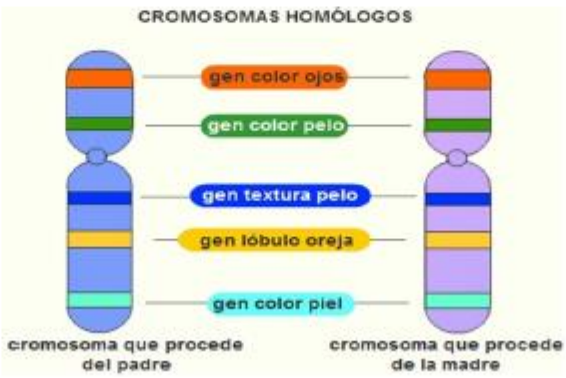
- **ARN ribosómico (ARNr)**: es el más abundante. El *ARNr* unido a *proteínas* forma los *ribosomas*, las fábricas donde se construyen las proteínas. La función principal de los *ribosomas* es llevar a cabo, junto al *ARNt*, la **traducción del ARNm a proteínas**. Estos orgánulos son los encargados del **proceso de traducción**.

5. LA HERENCIA GENÉTICA.

5.1. GENES Y ALELOS.

Cada ser vivo presenta unos rasgos característicos (anatómicos, fisiológicos y de comportamiento) que diferencian a un individuo de otro. Cada uno de esos rasgos distintivos se denomina **carácter**.

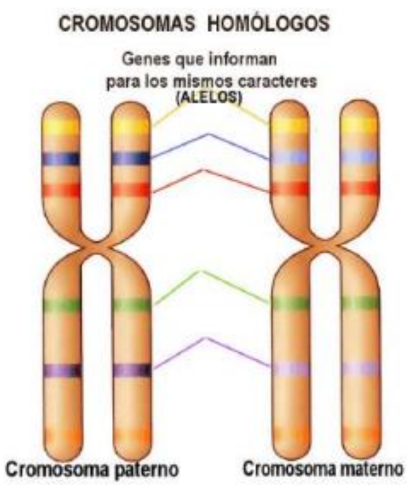
Muchos de estos *caracteres* son heredados de los progenitores. Algunos, además, tienen una clara influencia ambiental. Así, por ejemplo, la estatura es un *carácter heredado*, pero la alimentación influye de forma decisiva en este *carácter*.



Desde el punto de vista estructural, un **gen** es un **fragmento de ADN** que contiene la *información genética* para un determinado *carácter*, de tal manera que un *cromosoma* se puede considerar como un *conjunto de genes*.

Los seres humanos tenemos aproximadamente de 30.000 a 35.000 *genes*. Cada uno de ellos guarda información sobre un *carácter* distinto: el color del pelo, de los ojos, de la piel, el grupo sanguíneo, el sexo, las posibles enfermedades, las alergias, etc.

En la mayor parte de las especies, como las de las plantas y animales superiores, cada individuo tiene un conjunto de **genes heredados** de sus dos progenitores. Para cada *carácter*, cada individuo tiene dos informaciones: la del *gen heredado de su padre* y la del *gen heredado de su* *madre*. Los dos *genes* que informan sobre un mismo *carácter* (como el color del pelo) se llaman **genes alelos**.



Los **alelos** son formas alternativas del mismo gen y ocupan la misma posición en los *cromosomas homólogos*.

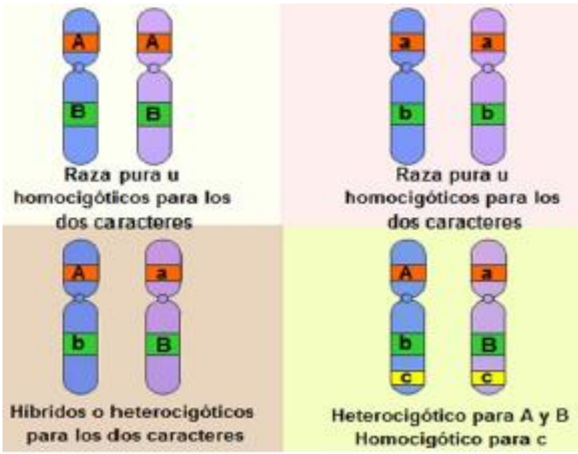
El *conjunto de genes* que posee un individuo heredados de sus progenitores, recibe el nombre de **genotipo**.

Pero, en general, ningún rasgo visible de ningún individuo está determinado por la presencia de un solo gen, sino que ese rasgo es el resultado de la cooperación de muchos genes y de su interacción con el ambiente. Por ejemplo, la altura de un individuo dependerá, además de la información genética heredada, de la alimentación recibida desde su nacimiento, de posibles accidentes sufridos, etc.

A ese conjunto de rasgos y caracteres observables en un individuo se le denomina **fenotipo**. Es la manifestación externa del *genotipo*. El *fenotipo* es el resultado de la interacción entre el *genotipo* y *el ambiente*.

<u>**Razas puras (homocigóticos) y razas híbridas (heterocigóticos)**</u>

Si un individuo presenta los dos **alelos iguales** para un *carácter*, decimos que el individuo es **homocigoto** o **puro** para dicho *carácter*. <u>Ejemplo</u>: si alguien ha heredado de su padre el gen responsable de "color de ojos azul" y el mismo *gen alelo* lo ha heredado de su madre, ese individuo es de **raza pura** para el color de los ojos.



Si por el contrario, un individuo presenta los dos **alelos diferentes** para un determinado *carácter*, decimos que es **heterocigoto** o **híbrido** para dicho *carácter*. <u>Ejemplo</u>: el mismo individuo del ejemplo anterior ha heredado de un progenitor el *gen alelo* "grupo sanguíneo A" y del otro progenitor el *gen alelo* "grupo sanguíneo 0", el individuo será de **raza híbrida** para el grupo sanguíneo.

<u>**Alelos dominantes y Alelos recesivos**</u>

Hay *alelos* que se manifiestan siempre ante la presencia de otros alelos (**herencia dominante**). Estos *alelos* que se manifiestan sobre otros son los llamados **alelos dominantes** y aquellos otros que quedan "ocultos" son los **alelos recesivos**.

En el ejemplo anterior, el *alelo* "grupo sanguíneo A" es el *alelo dominante* y el *alelo* "grupo sanguíneo 0" es el *alelo recesivo*.

Puede suceder que ninguno de los dos *alelos* predomine sobre el otro, en este caso se dice que ambos son **codominantes** (**herencia codominante**).

Si un individuo hereda de uno de sus progenitores el alelo grupo sanguíneo A y del otro progenitor el alelo grupo sanguíneo B, el fenotipo observable del individuo no será ni grupo A ni grupo B sino grupo sanguíneo AB porque ninguno de los dos *alelos* domina sobre el otro. Son *alelos codominantes*.

Habitualmente, a los *alelos* que puede presentar un gen se les asigna una letra y se utiliza la mayúscula (*A*) para el *dominante* y la minúscula (*a*) para el *recesivo*.

5.2. LAS LEYES DE MENDEL.

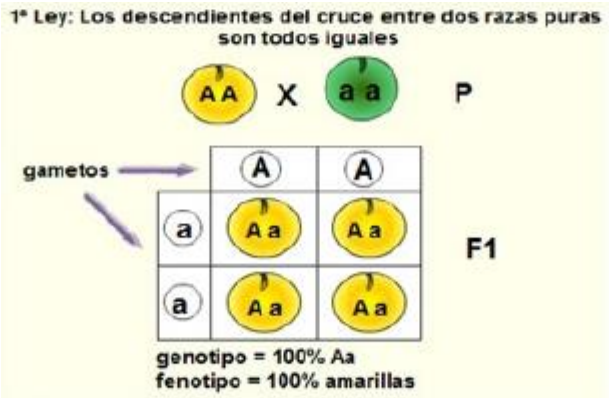
Todos sabemos que se puede observar un cierto parecido entre una persona y sus familiares más directos (padres, hijos, hermanos). Este parecido entre individuos de la misma familia, la misma raza o de la misma especie no se debe a la casualidad, sino que existen ciertas leyes o pautas que condicionan el desarrollo de los seres vivos. Estas pautas están contenidas en el material genético que se transmite de generación en generación y constituye la *herencia biológica*.

Mucho antes del descubrimiento del ADN, **Gregor Mendel**, descubrió las **leyes de la herencia**. A pesar de ello, su trabajo fue casi despreciado por la mayor parte de los científicos de su época.

Johann Gregor Mendel (1822-1884) fue un monje agustino austriaco. Ejerció de profesor y, desde 1856, se dedicó, en el huerto del monasterio, a experimentar con cruzamientos de plantas de guisantes. Trabajó fundamentalmente con tres caracteres diferentes: color de los guisantes (guisantes amarillos-guisantes verdes), textura de las semillas (semilla lisa-semilla rugosa) y color de las flores (flor blanca-flor roja).

Primer experimento de Mendel:

Comenzó seleccionando *razas puras* (*homocigóticos*) y cruzándolas entre sí. Observó que al cruzar guisantes amarillos y guisantes verdes, todos los guisantes obtenidos en la primera generación eran amarillos. Así demostró que el *alelo amarillo* era dominante sobre el *alelo verde* (A = amarillo, a = verde).



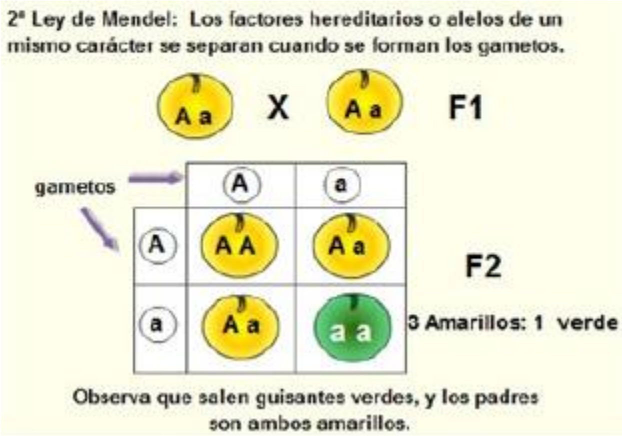
Esta observación le condujo a enunciar la **primera ley de Mendel** o **Ley de la uniformidad**: Si se cruzan dos *razas puras* para un determinado *carácter*, los **descendientes de la primera generación** son **todos iguales** entre sí y, a su vez, iguales a uno de sus progenitores: al que posee el *alelo dominante*.

Segundo experimento de Mendel:

Cruzó entre sí los guisantes amarillos de la primera generación procedentes del cruzamiento de dos razas puras y observó que entre los *descendientes de este segundo cruce* había un 75% de guisantes de color amarillo y un 25% de guisantes de color verde.

Además observó que la tercera parte de los guisantes amarillos obtenidos en esta segunda generación, se comportaban como guisantes de *raza pura dominante* puesto que todos sus descendientes eran de color amarillo (A = amarillo, a = verde).

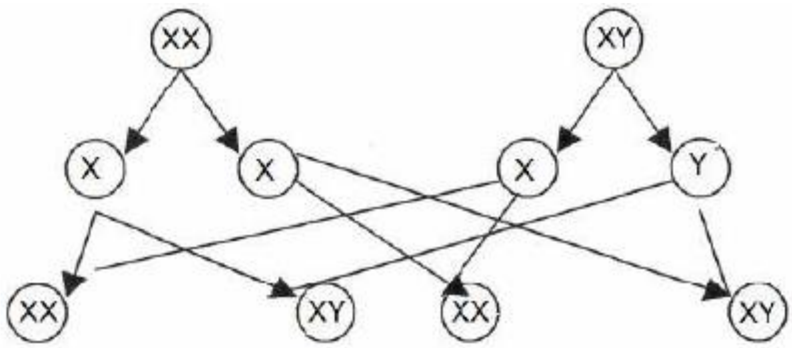
A partir de estos resultados, Mendel enunció su **segunda ley de Mendel** o **Ley de segregación de caracteres**: Los *caracteres recesivos*, que al cruzar dos razas puras quedan ocultos en la primera generación, reaparecen en la segunda generación en proporción de 1 a 3 respecto a los *caracteres dominantes*.



Los trabajos de *Mendel* fueron ignorados hasta que los avances en el campo de la *citología* (parte de la biología que estudia la célula y sus funciones) dieron la clave para explicar la transmisión y el comportamiento de los "*factores hereditarios*".

5.3. LA HERENCIA DEL SEXO.

Los seres humanos tienen **46 cromosomas** que aparecen agrupados en **23 parejas**. A los *cromosomas* del par 1 al 22 se les denomina **autosomas**, siendo comunes al hombre y a la mujer. A los del par 23 se les llama **heterocromosomas** o **cromosomas sexuales**. Estos pueden ser **X** o **Y**, y constituyen pares diferentes en función de que se trate de un hombre o una mujer: **XX** para la mujer y **XY** para el hombre. Estos últimos son los cromosomas responsables de determinar el sexo del individuo, **femenino** o **masculino**.



En la fecundación, el **óvulo** (*célula sexual femenina*) de la madre siempre aportará un *cromosoma X*, mientras que el **espermatozoide** (*célula sexual masculina*) del hombre aportará un *cromosoma X* o un *cromosoma Y*, de modo que el sexo del nuevo individuo dependerá del cromosoma que contenga el espermatozoide que lo fecunde. Si el resultado es *XX* dará lugar a una niña y si es *XY* dará lugar a un niño.

Dado que el número de cromosomas siempre debe mantenerse constante de generación en generación para que todo vaya bien, esto significa que todo individuo sólo puede heredar 23 cromosomas de cada progenitor en el momento de la **fecundación**.

Por lo tanto, si una mujer tiene 46 cromosomas y un hombre tiene 46 cromosomas, cada uno debe transferir a su hijo/a en el momento de la *fecundación* la mitad de su dotación (23 cromosomas), para que éste tenga finalmente 46 cromosomas. Esto es posible ya que los *gametos* (*óvulo* y *espermatozoide*) tienen la mitad de cromosomas (23 cromosomas).

5.4. LA HERENCIA DEL GRUPO SANGUÍNEO.

Un **grupo sanguíneo** es una clasificación de la *sangre* de acuerdo con las características presentes en la superficie de los glóbulos rojos y en el suero de la sangre. Las dos clasificaciones más importantes para describir grupos sanguíneos en humanos son el **sistema AB0** y el **sistema Rh (Rhesus**).

Los *grupos sanguíneos* del *sistema AB0* están determinados por un gen con *tres alelos* que se nombran: **alelo A**, **alelo B** y **alelo 0**.

El *alelo A* y el *alelo B* son *dominantes* respecto al *alelo 0* que es recesivo. Los alelos *A* y *B* son *codominantes* entre sí. Así, existen cuatro *fenotipos* distintos, que se corresponden a seis *genotipos* distintos, que dan lugar a cuatro *grupos sanguíneos*:

- **Grupo A**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos A* y producen *anticuerpos* contra los *antígenos B*.
- **Grupo B**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos B* y producen *anticuerpos* contra los *antígenos A*.

Genotipo	Fenotipo	Antígenos	Anticuerpos en suero
AA, A0	A	A	Anti-B
BB, B0	B	B	Anti-A
AB	AB	A y B	Ninguno
00	0	Ninguno	Anti-A y Anti-B

- **Grupo 0**. Sus glóbulos rojos no tienen en sus membranas ninguno de los *antígenos* anteriores. Poseen anticuerpos contra los *antígenos A* y contra los *antígenos B*. Este *grupo* es el **donante universal**.
- **Grupo AB**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos A* y *antígenos B*. No fabrican ningún *anticuerpo*. Este *grupo* es el **receptor universal**.

Conociendo el *grupo sanguíneo* de los padres, se puede saber el *grupo sanguíneo* posible de los hijos, y descartar en algunos casos los que son imposibles.

El otro sistema de *grupos sanguíneos* más conocido es el **sistema Rh**, basado en otro *antígeno* presente en la membrana de los glóbulos rojos, llamado **factor Rh**. La herencia respecto a este *factor Rh*, viene determinada por dos *alelos*:

- El **alelo R** determina la presencia del *antígeno Rh*, y es *dominante* sobre *r*.
- El **alelo r** que determina la ausencia del *antígeno Rh*. Es *recesivo* frente a *R*.

	Rh^+		Rh^-
Genotipos	RR	Rr	rr
Fenotipo	Grupo Rh^+ Homocigótico	Grupo Rh^+ Heterocigótico	Grupo Rh^- Homocigótico
Glóbulos rojos	Con antígenos R		Sin antígenos R
Plasma	Sin anticuerpos Rh		Con anticuerpos Rh

Los individuos del *grupo Rh+* tienen *antígenos R* en sus glóbulos rojos y, por tanto, no tienen *anticuerpos anti-Rh*. Así, pueden recibir sangre tanto de tipo *Rh-* como de *Rh+*. Los individuos del *grupo Rh-* no tienen *antígenos R*, y sí *anticuerpos anti-Rh*, por lo que no podrán recibir sangre de *grupo Rh+*.

En la tabla siguiente se puede ver la compatibilidad "*donante – receptor*" de los *grupos sanguíneos*.

Receptor	Donante							
	O-	O+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB-	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A-	X				X			
B+	X	X	X	X				
B-	X		X					
O+	X	X						
O-	X							

6. GENÉTICA.

La **Genética** es la ciencia que estudia la **herencia biológica**, es decir, los mecanismos de transmisión de los **caracteres biológicos** o **hereditarios** de generación en generación, y cómo éstos se expresan en cada persona. La *herencia biológica* se encuentra en el *ADN (ácido desoxirribonucleico)* presente en cada una de nuestras células.

Nuestro aspecto y función biológica, es decir, nuestro *fenotipo*, viene determinado en gran medida por nuestra constitución genética, es decir, nuestro *genotipo*. No obstante, hemos de tener en cuenta que la expresión de numerosos genes, y con ello, la manifestación de los *fenotipos* correspondientes, está condicionada por factores ambientales.

6.1. LAS MUTACIONES.

El **material genético** generalmente se transmite sin modificación de generación en generación, lo que permite la transmisión de un mismo *carácter* de unos individuos a otros. Sin embargo, en algunas ocasiones el *material genético* puede cambiar. Estos cambios se denominan **mutaciones**.

Las *mutaciones* provocan un cambio gradual en la estructura genética de las poblaciones, que es la base de la evolución. Son el origen de la diversidad genética. Si todos los individuos de una especie fueran genéticamente iguales no habría evolución.

Las *mutaciones* son la fuente de *nuevos alelos*, es decir *nuevos caracteres* que darán origen a distintos *fenotipos*. Algunos *fenotipos* pueden dar a los individuos más probabilidad de sobrevivir (*selección natural*) y dejar descendencia.

Una **mutación** es un cambio en la información contenida en el *ADN* de las células. Las *mutaciones* se pueden clasificar de varias formas.

Tipos de mutaciones

1. **Según el origen del mutación** se distinguen estas *mutaciones*:

- **Mutación espontánea**. Se producen por causas naturales, en la replicación del ADN o durante las fases G_1 y G_2 del ciclo celular.
- **Mutación inducida**. Causadas por la exposición a determinados **agentes mutágenos** presentes en el medio ambiente, como las *radiaciones* (rayos gamma, UV, X), *sustancias químicas* (ácido nitroso, humo del tabaco) o algunos *virus*.

2. **Según el ADN afectado** se distinguen estas *mutaciones*:
   - **Mutación génica**: Son las verdaderas *mutaciones*, porque se produce un cambio en la estructura del ADN. Son mutaciones que afectan sólo a la secuencia de *nucleótidos* de un gen. Ejemplo: *Albinismo*. El gen mutado impide que se sintetice el pigmento melanina.
   - **Mutación cromosómica**: Se produce un cambio en la estructura del cromosoma, bien porque se ha perdido algún segmento de un cromosoma, se intercambian fragmentos con otros cromosomas, etc. Ejemplo: *Síndrome del "maullido de gato"*. Se origina por la pérdida de un trozo del cromosoma 5.
   - **Mutación genómica**: Afecta al cromosoma entero, alterando el número de cromosomas (*genoma*) del individuo, con algún cromosoma de más o de menos respecto al número normal de cromosomas de su especie. Ejemplo: *Síndrome de Down*. Está repetido un cromosoma de la pareja 21, tienen por tanto 47 cromosomas.
3. **Según el tipo de células afectadas**:
   - **Somáticas**: Son aquellas que afectan a las *células somáticas*. Pueden originar lesiones o enfermedades graves como el cáncer. Al ocurrir en las células somáticas, no se transmiten a la descendencia, no son heredables.
   - **Germinales**: Afectan a los *gametos*. Estas mutaciones no se manifiestan en el propio individuo pero pueden transmitirse a futuras generaciones. Son heredables, como la *hemofilia hereditaria*.
4. **Según el efecto sobre el individuo** pueden ser:
   - **Perjudiciales**. Cuando suponen una desventaja para la supervivencia de la especie. Son las más comunes.
   - **Beneficiosas**. Cuando aumentan la probabilidad de supervivencia de una especie.
   - **Neutras**. Cuando no producen ni beneficio ni perjuicio al individuo que la sufre.

6.2. ENFERMEDADES GENÉTICAS.

Una **enfermedad genética** es una patología causada por una alteración del *genoma*. Esta puede ser hereditaria o no. Si el gen alterado está presente en los *gametos* (óvulos y espermatozoides), esta será *hereditaria* (pasará de generación en generación), por el contrario si sólo afecta a las *células somáticas*, no será heredada.

Las *enfermedades genéticas* pueden ser *monogénicas*, *poligénicas* o *cromosómicas*.

- **Monogénicas**. Causadas por la mutación o alteración en la secuencia del ADN de un solo gen. A su vez, estas pueden ser:

- **Autosómicas**: Si es *autosómica dominante*, la persona sólo necesita recibir el gen defectuoso de uno de los padres para heredar la enfermedad. Cuando uno de los padres está afectado, el hijo tiene un 50% de probabilidades de heredar la enfermedad. Además, hombres y mujeres tienen la misma probabilidad de padecerla. <u>Ejemplo</u>: *Neurofibromatosis*. Si es *autosómica recesiva*, sólo los individuos que hereden las dos copias del gen afectado (materna y paterna) heredarán la enfermedad. Los individuos con un solo gen afectado serán portadores de la enfermedad, pero no la expresarán. <u>Ejemplo</u>: *Fibrosis quística* o *albinismo*.
- **Ligadas a los cromosomas sexuales**. Si la herencia es *ligada al cromosoma X*, lo más común es que sea *recesiva*. En estos casos, aunque la mujer sea portadora de un gen anómalo, no padecerá la enfermedad, porque el cromosoma X normal compensará la anomalía. En cambio, cualquier varón que reciba el cromosoma X anómalo sufrirá la enfermedad. Cada hijo varón nacido de una mujer portadora de una enfermedad recesiva *ligada al cromosoma X* tiene un 50% de probabilidades de heredar el gen defectuoso y por tanto de desarrollar la enfermedad. <u>Ejemplo</u>: *hemofilia* y *daltonismo*. En la herencia *ligada al cromosoma Y*, sólo los varones padecerán esta enfermedad. Por lo tanto, un varón afectado transmitirá la enfermedad a todos sus hijos, pero a ninguna de sus hijas. Este tipo de herencia es muy poco frecuente.

▪ **Poligénicas** o **multifactoriales**. Cuando la enfermedad es el resultado de la acción conjunta de varios genes, más la interacción de éstos con los factores ambientales. No tiene un patrón de herencia establecido.

▪ **Cromosómicas**. Causadas por alteraciones en el número o estructura de los cromosomas. <u>Ejemplo</u>: *síndrome de Down*.

6.3. INGENIERÍA GENÉTICA.

La **ingeniería genética** se basa en la manipulación de genes (ADN) para obtener determinadas sustancias específicas aprovechables por los seres humanos: se trata de aislar (cortándolo de una molécula de ADN) el gen que produce la sustancia, e introducirlo en otro ser vivo que sea más sencillo y barato de manipular. Lo que se consigue es modificar las características hereditarias de un organismo, alterando su *material genético*.

La *ingeniería genética* tiene hoy en día múltiples aplicaciones, entre las que podemos citar por su importancia:

▪ La producción de *insulina* o de la *hormona de crecimiento humana*.

▪ La fabricación de determinadas *vacunas* (por ejemplo, vacuna anti-hepatitis B).

▪ La obtención de organismos resistentes a determinadas agresiones del ambiente o enfermedades (*organismos transgénicos*).

Un **organismo transgénico** es aquella planta, animal, hongo o bacteria a la que se le ha agregado por *ingeniería genética* uno o unos pocos genes de otro organismo con el fin de producir proteínas de interés industrial o bien mejorar ciertos rasgos, como la resistencia a plagas, la calidad nutricional, la tolerancia a heladas, entre otras características.

En el año 1997 se originó una gran revolución en la biología, con la **clonación** de un mamífero adulto, a partir de células de su *glándula mamaria* y no de un *embrión* y sin participación del macho, naciendo así la "Oveja Dolly" en el Instituto escocés Roslin. Esta técnica ha mejorado con los años a pesar de las limitaciones de carácter legal, religioso, ético y moral.

Además de la producción de *plantas y animales transgénicos*, y *clonación de animales*, la *ingeniería genética* presenta otras aplicaciones como la *terapia génica* para corregir o sustituir un gen alterado por uno no mutado, determinación de la huella genética del individuo, así como de enfermedades hereditarias o causadas por la alteración de un gen, creación de microorganismos modificados genéticamente para la elaboración de fármacos u otros productos, entre otros.

6.4. LOS ALIMENTOS TRANSGÉNICOS.

Llamamos **alimentos transgénicos** a alimentos genéticamente modificados. Mediante la *ingeniería genética* han podido modificarse las características de gran cantidad de plantas para hacerlas más útiles al hombre, son las llamadas *plantas transgénicas*. Una de las primeras plantas obtenidas mediante estas técnicas fue un tipo de tomates que tardan en madurar unas semanas después de ser cosechados. También se han conseguido plantas resistentes a productos químicos, insectos o enfermedades. Por ejemplo, ya existen semillas de algodón insensibles a herbicidas y plantas transgénicas que resisten invasiones de virus o que producen toxinas dañinas para algunos insectos.

Las repercusiones de los *alimentos transgénicos* en la salud de los consumidores, es una cuestión que ha suscitado mucha polémica, al no disponer de estudios a largo plazo. Existen opiniones que afirman que el cultivo de *alimentos transgénicos* ocasiona numerosos riesgos para el medio ambiente y la salud de las personas. Entre ellos se destaca la pérdida de biodiversidad, la generación de resistencias a antibióticos, el desarrollo de resistencias en insectos y malas hierbas o los efectos no deseados en otros organismos.

Algo que debe dar seguridad al consumidor es que, según establece la ley, los *alimentos transgénicos* sólo pueden comercializarse si han pasado estrictos controles, aún más rigurosos que los de los productos tradicionales. Algunas mejoras que estos *alimentos transgénicos* han producido son:

- **Retraso en la maduración**: El producto tarda más tiempo en madurar después de haber sido cosechado, lo que hace que su durabilidad sea mayor.
- **Mejora de la calidad**: El producto mejora sus propiedades organolépticas. La *ingeniería genética* ha permitido obtener variedades de café más aromáticas.
- **Producción de sustancias**: Se obtienen plantas que tienen propiedades especiales distintas a las que poseen de manera natural, o que mejoran su calidad nutricional.

- **Resistencia a herbicidas e insectos**: Esto produce mayores rendimientos en las cosechas. Ciertas variedades de soja transgénica son resistentes a herbicidas. El maíz transgénico soporta el ataque de determinados insectos, como el taladro del maíz.

7. EVOLUCIÓN DE LOS SERES VIVOS.

El estudio de los fósiles es una de las pruebas de la evolución y que también nos informa de la historia de la misma, dándonos datos sobre la extinción y la aparición de las especies en la Tierra.

Algunos **fósiles** han servido para marcar ciertas etapas de la historia de la Tierra, a estos se les llama **fósiles representativos**.

Desde que aparecieron las primeras formas de vida, los distintos organismos han sufrido cambios en su aspecto y en la forma de relacionarse con su entorno. Por eso, los habitantes del planeta han cambiado tanto en el devenir de su larga historia.

La **evolución biológica** es el proceso de *transformación de las especies* a lo largo del tiempo. La consecuencia de la *evolución biológica* es la aparición de nuevas especies.

La **evolución** ha originado la enorme diversidad de especies que hay en nuestro planeta. Todas ellas provienen de otras ya existentes. Así mismo, las especies actuales darán lugar a otras distintas en el futuro.

Existen dos tipos de teorías sobre el origen de las especies:

- **Fijismo**. Las especies han permanecido inmutables desde su creación. En la actualidad el fijismo no está científicamente aceptado.
- **Evolucionismo**. Las especies pueden cambiar y generar otras especies. Actualmente para la comunidad científica la evolución es un hecho comprobado. Existen distintas teorías evolucionistas: el **lamarckismo**, el **darwinismo** y la **teoría sintética** o **Neodarwinista**.

7.1. TEORÍAS SOBRE LA EVOLUCIÓN.

Jean Baptiste de Lamarck, pensaba que unas especies se transforman en otras a lo largo del tiempo. Su teoría se basa en los siguientes puntos:

- **El uso repetido de un órgano produce su desarrollo**. Los cambios que se producen en el entorno hacen que los seres vivos se adapten al medio modificando ciertos órganos en función de su uso o desuso. La función crea el órgano y su desuso produce degeneración. De esta forma, los caracteres originales van siendo sustituidos lentamente por una serie de **caracteres adaptativos** o **caracteres adquiridos**.
- **Los caracteres adquiridos son heredables**. Las modificaciones inducidas por el ambiente, que un organismo adquiere durante su vida, pueden transmitirse a la descendencia. Por ello la *teoría de Lamarck* también es conocida como la **teoría de los caracteres adquiridos** (1809).

Un ejemplo de *lamarckismo* es la modificación de la longitud del cuello de las jirafas. Su antecesor era de cuello corto, pero lo estiraba para obtener el alimento de los árboles más altos, lo que le llevó a desarrollarlo y a transmitirlo a la descendencia.

Lamarck se equivocó al pensar que los caracteres adquiridos se transmiten a la descendencia. Hoy sabemos que sólo se transmiten los caracteres hereditarios cuya información si va codificada en los genes.

Charles Darwin fue un naturalista que pasó la mayor parte de su vida investigando los orígenes de las especies. En 1858 presentó su **Teoría de la Evolución de las Especies por Medio de la Selección Natural**. En ella sostenía que:

1. **Existe entre los organismos una lucha por la supervivencia**. La mayoría de las especies tienen una elevada capacidad reproductiva. Pero los recursos del medio, como el alimento, son limitados. Si nacen más individuos de los que pueden sobrevivir, entre ellos se produce una *lucha por la supervivencia*.
2. **Hay una gran variabilidad de caracteres entre los individuos de una especie**.
3. **El medio selecciona a los organismos mejor adaptados**. Aquellos individuos que presenten una variación ventajosa para un determinado ambiente tendrán mayor probabilidad de sobrevivir.

Como resumen diremos que el *darwinismo* propone que las especies van cambiando gradualmente hasta originar especies nuevas, este cambio lo dirige la **selección natural** (las condiciones del medio en el que viven dichas especies) que es la que conduce los cambios de las especies hacia una dirección determinada.

Un ejemplo de *darwinismo*: En una población de jirafas, las habrá con el cuello ligeramente más largo y otras ligeramente más corto. Las de cuello largo, en periodos de sequía, podrán alcanzar las hojas más altas para comer, por lo que tendrán más probabilidad de sobrevivir y reproducirse. Sus descendientes heredarán los genes que han determinado ese cuello más largo. Si este proceso se repite a lo largo de cientos de generaciones la especie actual de jirafa se convertirá en una especie nueva con el cuello más largo y con capacidad de alcanzar ramas más altas.

Hacia 1930 surgió la llamada **Teoría Sintética** o **Neodarwinista**. Los nuevos conocimientos en el campo de la genética llevaron a un grupo de científicos a formular una nueva teoría de la evolución que proponía como principales motores del cambio evolutivo las **mutaciones**, la **recombinación génica** y la **selección natural**.

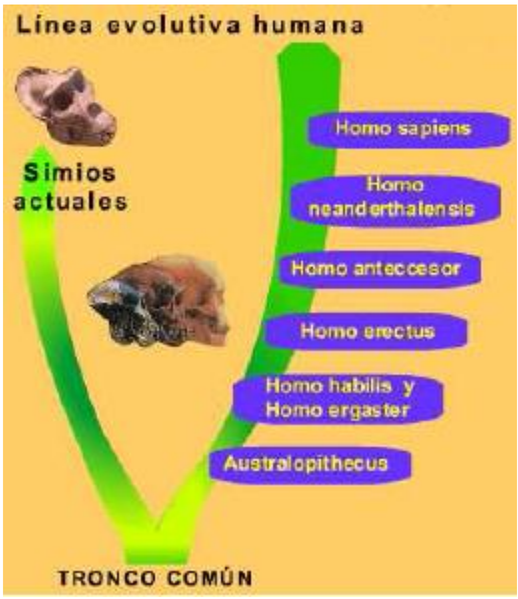
Darwin no pudo explicar cómo se origina la variabilidad sobre la que actúa la selección natural. Actualmente se sabe que muchas de las diferencias existentes entre los individuos se deben a *variaciones genéticas*, que se generan por dos procesos: la *mutación* y la *recombinación génica*. Sobre las *variaciones* actúa la *selección natural*.

La *Teoría Sintética* es, por tanto, la teoría moderna de la evolución, resultado del trabajo de muchos científicos, tomando como punto de partida a **Darwin** y **Mendel**.

7.2. LA EVOLUCIÓN HUMANA.

Nuestra especie, el **Homo sapiens**, surgió hace sólo 100.000 años, pero los antepasados de los cuales procedemos se remontan a unos cuatro millones de años antes.

Los descubrimientos recientes hacen que nuestra línea evolutiva no sea definitiva, sino que se adapte a la nueva información que los científicos van aportando con sus investigaciones.



El ser humano pertenece a la familia de los homínidos, conjuntamente con los simios actuales, los chimpancés, el gorila y el orangután. Pero hay una relación de fósiles de homínidos que nos indican nuestra *línea evolutiva*.

En ella se puede ver cómo ha ido evolucionando el hombre *(Homo sapiens*) hasta nuestros días, desde nuestros ancestros (*Australophitecus*), hasta nuestro antecesor el *Homo Neanderthal*.

Unos de los yacimientos que más información ha proporcionado a los investigadores es el de *Atapuerca*, en Burgos.

7.3. LA HUMANIDAD Y LA EVOLUCIÓN.

Nuestra forma de vida nos ha llevado a relacionarnos con otras especies, unas veces de forma beneficiosa, como fuente de alimentos y otros recursos, pero en otras hemos provocado su desaparición tanto en el pasado como ahora en el presente.

<u>En el pasado</u>

La caza y el uso del fuego por el ser humano han sido los responsables de la desaparición de especies en el pasado, unido a veces a cambios climáticos naturales adversos. Algunos ejemplos son:

- Muchos grandes mamíferos se extinguieron en un periodo de entre 90.000 y 20.000 años, como el *mamut* y el *mastodonte*.
- Con el desarrollo de la agricultura y la domesticación de animales hace 10.000 años comenzó la selección de especies para la alimentación humana.

- La caza excesiva del ser humano ha hecho desaparecer numerosas especies como el *dodo* en el siglo XVII, la *paloma migratoria americana* en 1914 o el *tigre de Tasmania* en Australia en 1936.

<u>En el presente</u>

La principal consecuencia de la forma de vida del ser humano es la presión que está ejerciendo sobre las demás especies, llevándolas a su extinción.

Muchas de las especies que desaparecen ni siquiera han sido descubiertas y estudiadas, perdiéndose así para siempre

La presión humana se debe a varias causas:

- La *caza*, el *coleccionismo* y el *comercio*, que afecta principalmente a especies exóticas.
- La *introducción de especies invasoras* que desplazan a las autóctonas provocando su desaparición.
- La *pérdida de hábitat* debido a la deforestación, la desecación de humedales y el urbanismo descontrolado.

- La *sobrepesca*, la *ganadería excesiva* y la *agricultura intensiva* son responsables de la desaparición de un gran número de especies con importancia alimenticia.

- La *contaminación del entorno natural* y *el cambio climático* que está sucediendo en la actualidad, están llevando a muchos ecosistemas a una situación límite.
- La *colonización de tierras y selvas* ha llevado a numerosas tribus al borde de su extinción, como los *bosquimanos*, los *yanomamis* y otras tribus primitivas.

RESUMEN DEL TEMA 3

1. LA CÉLULA.

La **célula** es la parte más pequeña de un ser vivo que tiene vida propia. También se define como la unidad anatómica y funcional de los seres vivos. Toda *célula* contiene las estructuras necesarias para su funcionamiento y es capaz de desempeñar las funciones de un ser vivo: *nutrición*, *relación* y *reproducción*.

Las *células* se clasifican atendiendo al grado de complejidad en: *células procariotas* y *eucariotas*.

La **célula procariota** es la célula más primitiva, por lo que es el tipo de célula más sencilla. Los organismos basados en *células procariotas* son prácticamente *unicelulares*. La *célula procariota* se caracteriza porque no contienen núcleo que proteja al *material genético (ADN)*, que se encuentra disperso en el *citoplasma*, reunido en una zona denominada *nucleoide*.

Las **células eucariotas** contienen *membrana*, *citoplasma* y *núcleo*. El núcleo, que está protegido por la membrana celular, contiene el *material genético (ADN)*, cuya molécula contiene la información genética y controla la actividad celular.

A los organismos o seres vivos que están formados por una sola célula se les denominan **unicelulares** y aquellos que están formados muchas células se les denominan **pluricelulares**.

Existen dos tipos de células en un organismo pluricelular: *células somáticas* y *células germinales o sexuales*. Tanto las *células somáticas* como las *células germinales* proceden de **células madre** originadas durante el desarrollo embrionario.

Las **células somáticas** constituyen la mayoría de las células del cuerpo de un *organismo pluricelular*, por lo tanto, son aquellas que conforman el crecimiento de los tejidos y órganos de un ser vivo pluricelular. Las *células somáticas* son **diploides (2n)**, es decir, contienen toda la información genética de un individuo, organizada en 23 pares de cromosomas, 23 proceden de la madre (óvulo) y 23 del padre (espermatozoide).

Las **células germinales** o **sexuales** son las responsables de la formación de las **células reproductoras** o **gametos**, los *espermatozoides* en los hombres y los *óvulos* en las mujeres. Las *células germinales* están situadas en las **gónadas** de los aparatos reproductores femenino y masculino (*testículos* y *ovarios*). Los **gametos** son células **haploides (n)**, es decir, con la mitad de la información genética de un individuo (23 cromosomas).

1.1. LA CÉLULA EUCARIOTA.

Las *células eucariotas* están constituidas por tres estructuras básicas: la **membrana plasmática**, el **citoplasma** y el **núcleo**.

- **Membrana plasmática**. Es la capa exterior que aísla y protege a la célula del medio que la rodea, regulando el intercambio de sustancias con él.

- **Citoplasma**. Es una sustancia viscosa en la que se encuentran los *orgánulos celulares* responsables de las diferentes funciones de la célula, como la respiración celular, la digestión celular, la secreción celular, el almacenamiento y el transporte de proteínas, etcétera.
- **Núcleo celular**. Es el orgánulo responsable de controlar las funciones celulares. En su interior se encuentra el *material genético* o *ADN*, que contiene toda la información relacionada con la organización y funcionamiento celulares. El *ADN*, que se encuentra unido a *proteínas*, recibe el nombre de **cromatina** y se encuentra repartido de forma difusa por todo el *núcleo*, constituyendo una masa de aspecto filamentoso. Al iniciarse la *división celular*, la *cromatina* se condensa y adquiere una estructura definida, dando lugar a los **cromosomas**.

2. EL CICLO CELULAR. PROCESOS DE DIVISIÓN CELULAR.

El **ciclo celular** es el conjunto de cambios que sufre una célula desde su formación, a partir de una *división celular*, hasta que se divide para formar dos células nuevas. Tiene distinta duración entre las células de diferentes seres vivos, incluso entre células del mismo ser vivo.

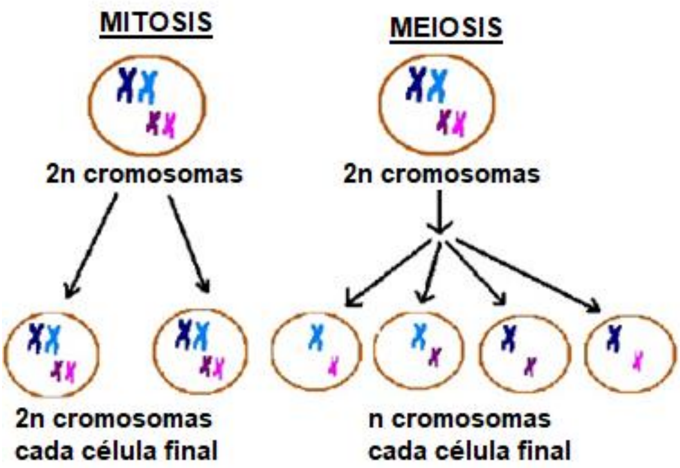
El *ciclo celular* comprende dos fases importantes: la **interfase**, que es la fase más larga del ciclo, ocupando casi el 90 por ciento de este, y la **división celular**. Ésta última se puede producir dos formas, por **mitosis** o **meiosis**.

Durante la **interfase**, la célula crece y hace una copia de su ADN. Durante la **división celular**, la célula separa su ADN en dos grupos (división del núcleo) y divide su citoplasma (*citocinesis*) para formar dos nuevas células.

2.1. MITOSIS.

La **mitosis** es un proceso de *división celular* de una *célula diploide (2n)* que produce dos *células hijas diploides (2n)* idénticas a la original. Las *células somáticas* se dividen por *mitosis* para dar células genéticamente iguales a sus predecesoras.

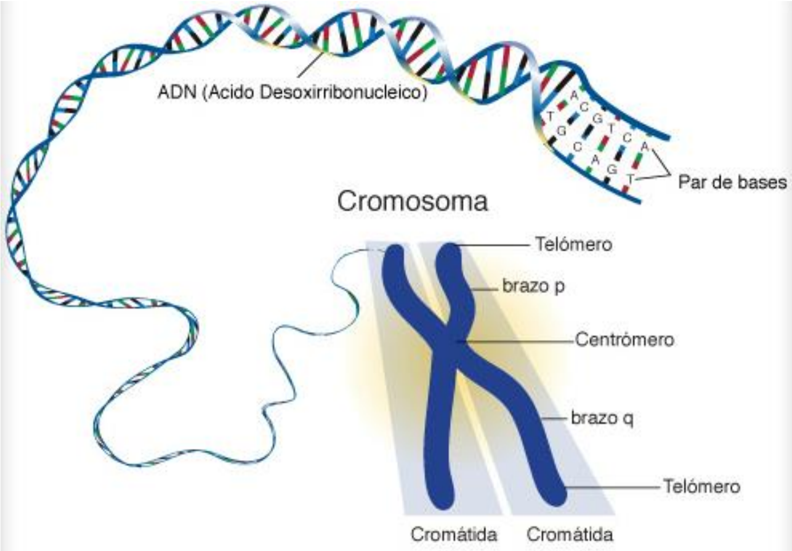
Este proceso de multiplicación celular permite el crecimiento del individuo y el reemplazo de células dañadas o muertas.



2.2. MEIOSIS.

La **meiosis** es un proceso de *división celular* de una *célula diploide (2n)* que produce cuatro *células hijas haploides (n)*, con la mitad de información genética que sus predecesoras. Estas células reciben el nombre de **gametos**. Las células de los órganos reproductores (*ovarios* y *testículos*), las *células germinales* o sexuales, experimentan este tipo especial de reproducción celular.

Cuando las células se dividen por *meiosis* originan células con la mitad de información genética que sus predecesoras. Este avance evolutivo permite que aparezcan seres variados genéticamente, que pueden resultar mejor o peor adaptados que sus progenitores al medio ambiente en el que se desarrollan.



3. EL ESTUDIO DEL ADN.

3.1. LOS CROMOSOMAS.

El **ADN** o **ácido desoxirribonucleico** es una molécula que se encuentra en el núcleo de una célula, y contiene su información genética en su estructura. Cuando la célula no se está dividiendo, el *ADN* se encuentra descondensado en el núcleo en forma de **cromatina**. Cuando una célula va a dividirse, el *ADN* se duplica y forma dos copias idénticas, se espiraliza, es decir, se enrolla cientos de veces y se condensa, formando los **cromosomas**.

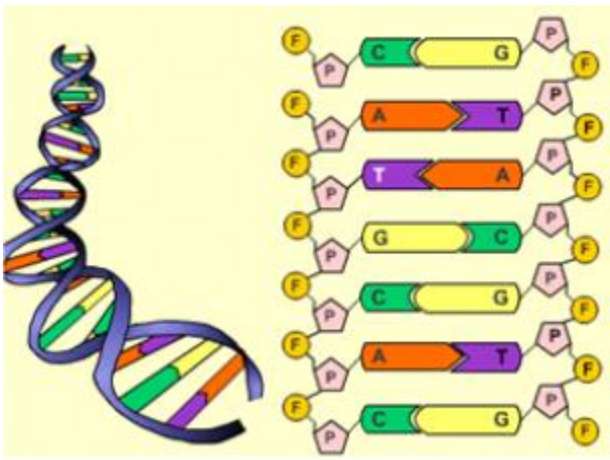
Cada *cromosoma* está formado por las dos copias de *ADN*, las **cromátidas**, que se unen en un punto denominado **centrómero**. El *centrómero* divide a las *cromátidas* en dos partes que se denominan **brazos**.

Los *cromosomas* varían en número y forma entre los seres vivos. Todos los seres vivos de la misma especie tienen el mismo número de *cromosomas* en cada una de sus células, excepto en las *células reproductoras* o *gametos* que poseen la mitad. Los seres humanos tenemos **46 cromosomas**, distribuidos en **23 pares**. Un juego de *cromosomas* es de origen materno y el otro de origen paterno.

Los *cromosomas* que tienen la misma forma y tamaño y proporcionan información sobre los mismos caracteres, forman pareja y se denominan *cromosomas homólogos***.** El **cariotipo** es la representación de los *cromosomas* de una especie.

En el caso de los seres humanos, el *cariotipo* muestra 22 parejas de **cromosomas homólogos** (*autosomas*), que son iguales en ambos sexos, y dos **cromosomas sexuales** (*heterocromosomas*), llamados XX para la mujer y XY para el hombre.

3.2. ESTRUCTURA DEL ADN.



La **molécula de ADN** está formada por la unión de dos larguísimas cadenas de **nucleótidos**. Estas dos cadenas están enrolladas una sobre la otra, de forma similar a una escalera de caracol. Es lo que se conoce como **estructura de doble hélice**.

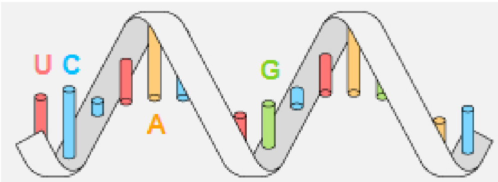
En el *ADN* sólo existen cuatro tipos de *nucleótidos* distintos, diferenciándose solamente en uno de sus componentes, las llamadas **bases nitrogenadas**: *adenina (A), citosina (C), guanina (G)* y *timina (T)*.

Estas *bases nitrogenadas*, en la *molécula de ADN* se encuentran emparejadas: la **adenina (A)** es capaz de unirse con la **timina (T)** y la **guanina (G)** siempre se empareja con la **citosina (C)**, formando una estructura similar a los peldaños de una escalera. Como siempre se emparejan unas *bases* con otras, conociendo la secuencia de *bases* de una hilera se puede saber la otra.

El *ADN* es la materia que constituye los **genes** y es el lugar donde reside la información genética de un ser vivo. Su secuencia de *nucleótidos* contiene la información necesaria para poder controlar el metabolismo de un ser vivo.

4. EL ARN.

El **ARN** o **Ácido ribonucleico** es una molécula en forma de cadena simple de nucleótidos formados, a su vez, por un *azúcar* (**ribosa**), un *fosfato* y una de las cuatro *bases nitrogenadas* que componen el código genético: **Adenina (A)**, **Citosina (C)**, **Guanina (G)** y **Uracilo (U)**. Este último sustituye a la *Timina (T)* del ADN.



El ARN es uno de los **ácidos nucleicos** elementales para la vida, encargado junto al *ADN* (*ácido desoxirribonucleico*) de las labores de **síntesis de proteínas** y **herencia genética**. Está presente tanto en las *células procariotas* como en las *eucariotas*.

Las funciones de cada uno están determinadas por la composición química y su estructura.

El ARN puede encontrarse en diferentes partes de la célula. Por lo general, se sintetiza en el núcleo y de ahí va al citoplasma. Todos los ARN se forman a partir del ADN, tomando una parte de él como molde. Este hecho hace que ambos sean **complementarios**.

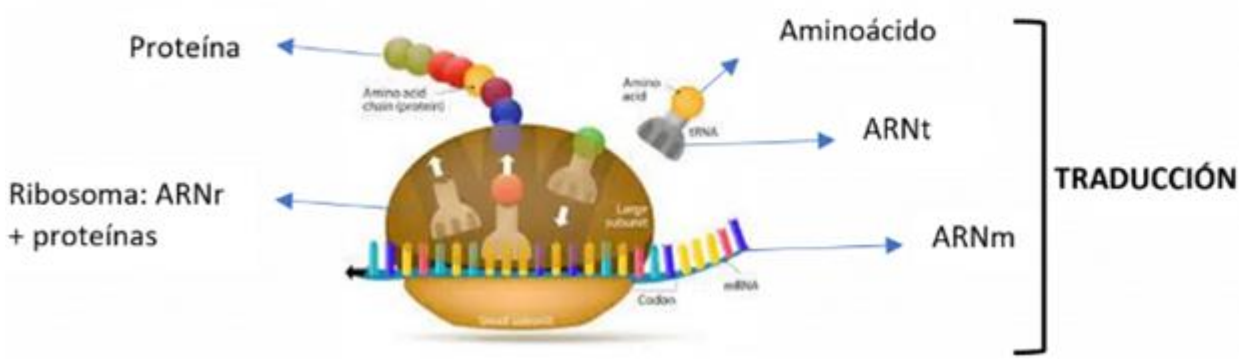
4.1. TRANSCRIPCIÓN DEL ADN. SÍNTESIS DE PROTEÍNAS O TRADUCCIÓN DEL ARN.

En la mayoría de los organismos, seres humanos incluidos, la **función del ARN** es **copiar la información genética del ADN** y transportarla fuera del núcleo, de tal forma que sea posible su expresión en *proteínas*, los elementos funcionales de nuestro organismo. El ARN dirige la **síntesis de proteínas** a partir de la información obtenida del ADN.

Existen varios tipos de ARN. Cada uno de ellos tiene una **estructura y función específica**.

- **ARN mensajero (ARNm)**: Se ocupa de copiar y llevar la secuencia exacta de *aminoácidos* del ADN hacia los *ribosomas*, donde se siguen las instrucciones y se procede a la **síntesis de proteínas**. El *ARNm* es la molécula que resulta del **proceso de la transcripción**.
- **ARN de transferencia (ARNt)**: Su función es transportar *aminoácidos específicos* hasta los *ribosomas*, que van a actuar como máquinas ensambladoras, ordenando a lo largo de la molécula de *ARN mensajero (ARNm)* a los *aminoácidos* correctos en base al código genético. De esta forma se consigue completar ese **proceso de traducción.**

- **ARN ribosómico (ARNr)**: Se encuentra en los *ribosomas* de la célula, donde están combinados con otras proteínas. La función principal de los *ribosomas* es llevar a cabo, junto al *ARNt*, la **traducción del ARNm a proteínas**.



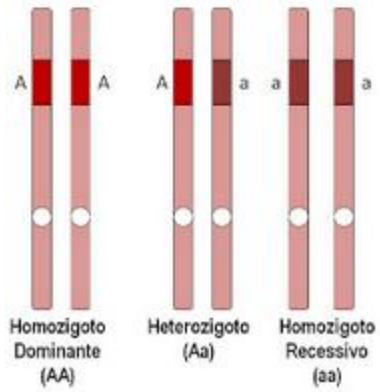
5. LA HERENCIA GENÉTICA.

5.1. GENES Y ALELOS.

Desde el punto de vista estructural, un **gen** es un **fragmento de ADN** que contiene la *información genética* para un determinado **carácter**. Los *genes* se encuentran alineados a lo largo del *cromosoma*. Cada uno de ellos guarda información sobre un *carácter* distinto: el color del pelo, de los ojos, de la piel, el grupo sanguíneo, el sexo, las posibles enfermedades, las alergias, etc.

Cada individuo tiene un conjunto de **genes heredados** de sus dos progenitores. Para cada *carácter*, cada individuo tiene dos informaciones: la del *gen heredado de su padre* y la del *gen heredado de su madre*. Los dos *genes* que informan sobre un mismo *carácter* (como el color del pelo) se llaman **genes alelos**. Las distintas manifestaciones de un gen, se llaman *alelos*.

El *conjunto de genes* que posee un individuo heredados de sus progenitores, recibe el nombre de **genotipo**. Al conjunto de rasgos y caracteres observables de un individuo se le denomina **fenotipo**. Es la manifestación externa del *genotipo*. El *fenotipo* es el resultado de la interacción entre el *genotipo* y *el ambiente*.



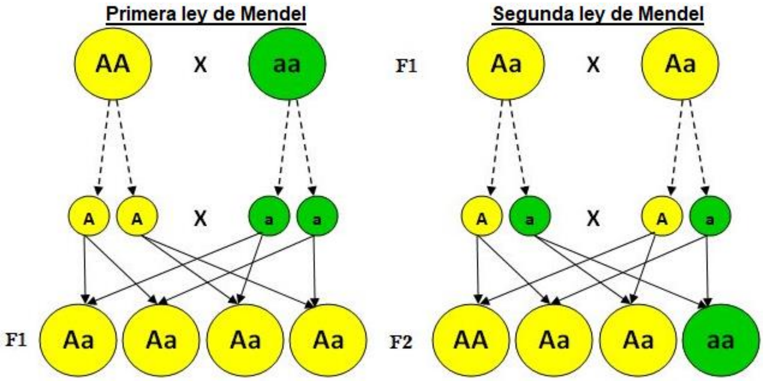
Si un individuo presenta los dos *alelos* iguales para un *carácter*, decimos que el individuo es **homocigoto** o de **raza pura** para dicho *carácter*. Si por el contrario, presenta los dos *alelos* diferentes para un determinado carácter, decimos que es **heterocigoto** o de **raza híbrida** para dicho *carácter*.

Los *alelos* pueden ser **dominantes** (*herencia dominante*), **recesivos** (*herencia recesiva*) o **codominantes** (*herencia codominante*). Habitualmente, a los *alelos* que puede presentar un gen se les asigna una letra y se utiliza la mayúscula (A) para el *dominante* y la minúscula (a) para el *recesivo*.

5.2. LAS LEYES DE MENDEL.

Las **leyes de Mendel** fueron desarrolladas por un científico genetista, considerado como el padre de la genética: *Gregor Mendel*. Este científico realizo experimentos que permitieron dilucidar elementos fundamentales de la *herencia genética*. Estas leyes permiten predecir a través de las características de los progenitores de una especie, los rasgos de sus descendientes, desde animales, plantas y hasta seres humanos.

La **1ª ley de Mendel**, también llamada **ley de la uniformidad**, nos dice que al cruzar dos *razas puras* para un determinado *carácter*, los descendientes de la primera generación son todos iguales entre sí y, a su vez, iguales a uno de sus progenitores: al que posee el *alelo dominante*.

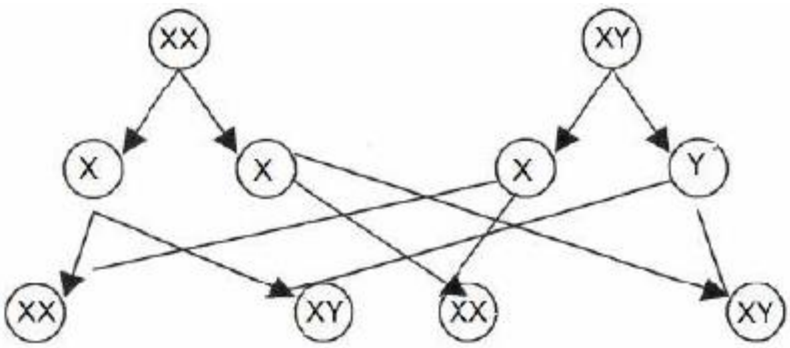


Según la **2ª ley de Mendel**, también llamada **ley de la segregación**, nos dice que los *caracteres recesivos*, que al cruzar dos *razas puras* quedan ocultos en la primera generación, reaparecen en la segunda generación en proporción de 1 a 3 respecto a los *caracteres dominantes*.

5.3. LA HERENCIA DEL SEXO.

Los seres humanos tienen **46 cromosomas** que aparecen agrupados en **23 parejas**. A los *cromosomas* del par 1 al 22 se les denomina **autosomas**, siendo comunes al hombre y a la mujer. A los del par 23 se les llama **heterocromosomas** o **cromosomas sexuales**. Estos pueden ser **X** o **Y**, y constituyen pares diferentes en función de que se trate de un hombre o una mujer: **XX** para la mujer y **XY** para el hombre. Estos últimos son los cromosomas responsables de determinar el sexo del individuo, **femenino** o **masculino**.

En la fecundación, el **óvulo** (*célula sexual femenina*) de la madre siempre aportará un *cromosoma X*, mientras que el **espermatozoide** (*célula sexual masculina*) del hombre aportará un *cromosoma X* o un *cromosoma Y*, de modo que el sexo del nuevo individuo dependerá del cromosoma que contenga el espermatozoide que lo fecunde. Si el resultado es *XX* dará lugar a una niña y si es *XY* dará lugar a un niño.



5.4. LA HERENCIA DEL GRUPO SANGUÍNEO.

En los seres humanos existen cuatro tipos de grupos sanguíneos:

- **Grupo A**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos A* y producen *anticuerpos* contra los *antígenos B*.

Genotipo	Fenotipo	Antígenos	Anticuerpos en suero
AA, A0	A	A	Anti-B
BB, B0	B	B	Anti-A
AB	AB	A y B	Ninguno
00	0	Ninguno	Anti-A y Anti-B

- **Grupo B**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos B* y producen *anticuerpos* contra los *antígenos A*.
- **Grupo 0**. Sus glóbulos rojos no tienen en sus membranas ninguno de los *antígenos* anteriores. Poseen anticuerpos contra los *antígenos A* y contra los *antígenos B*. Este *grupo* es el **donante universal**.
- **Grupo AB**. Sus glóbulos rojos tienen en sus membranas *antígenos A* y *antígenos B*. No fabrican ningún *anticuerpo*. Este *grupo* es el **receptor universal**.

La información sobre los *grupos sanguíneos* está controlada por tres *alelos*: **alelo A**, **alelo B** y **alelo 0**, aunque cada individuo sólo puede tener dos de ellos, uno en cada cromosoma del par en el que se sitúan. Los *alelos A* y *B* son *dominantes* respecto al *alelo 0*, que es *recesivo*. Los *alelos A* y *B* son *codominantes* entre sí.

	Rh^+		Rh^-
Genotipos	RR	Rr	rr
Fenotipo	Grupo Rh^+ Homocigótico	Grupo Rh^+ Heterocigótico	Grupo Rh^- Homocigótico
Glóbulos rojos	Con antígenos R		Sin antígenos R
Plasma	Sin anticuerpos Rh		Con anticuerpos Rh

Además, en la sangre hay que tener en cuenta el **factor Rh**, un *antígeno* de la membrana de los glóbulos rojos. Son *Rh positivos* aquellas personas que presentan dicho *antígeno* y *Rh negativo* quienes no presenten este *antígeno*. La herencia respecto a este *factor Rh*, viene determinada por dos *alelos*: **R** y **r**. El *alelo R* es dominante sobre *r*. El *factor Rh* se hereda del padre y de la madre, siendo el *Rh+* dominante sobre el *Rh-*.

6. LA GENÉTICA.

La **Genética** es la rama de la Biología que estudia los *genes* y los mecanismos que regulan la transmisión de los *caracteres hereditarios*.

Nuestro aspecto y función biológica, es decir, nuestro *fenotipo*, viene determinado en gran medida por nuestra constitución genética, es decir, por nuestro *genotipo*.

No obstante, hemos de tener en cuenta que la expresión de numerosos genes, y con ello, la manifestación de los *fenotipos* correspondientes, está condicionada por factores ambientales.

6.1. LAS MUTACIONES.

Una **mutación** es un cambio en la información contenida en el ADN. Para que sea heredable tiene que ocurrir en las *células sexuales* o *gametos*: *óvulos* y *espermatozoides*. Las *células somáticas* pueden sufrir *mutaciones* sin transmitir sus modificaciones a los futuros descendientes. Las *células somáticas* que mutan, sin embargo, pueden ser la causa de *cánceres*, entre ellos el *cáncer de colon*.

Las **mutaciones** producen variabilidad y por tanto diferentes *fenotipos*, sobre los que puede actuar la **selección natural**. Las *mutaciones* son la fuente de *nuevos alelos*, es decir *nuevos caracteres* que darán origen a distintos *fenotipos*.

Algunos *fenotipos* pueden dar a los individuos más probabilidad de sobrevivir (*selección natural*) y dejar descendencia.

Aunque a veces se identifican las *mutaciones* con las enfermedades que pueden producir, recuerda que gracias a ellas hay cambios y ha sido posible la **evolución**.

Las *mutaciones* que se producen al azar por causas naturales, son **mutaciones espontáneas**. Otras pueden ser inducidas artificialmente mediante *agentes físicos*, como las radiaciones, *agentes químicos*, como ciertos fármacos o *agentes biológicos*, como los virus. A estos factores se les llama **agentes mutágenos**.

Según el ADN afectado la *mutación* puede ser:

- **Mutación génica**: Son las verdaderas *mutaciones*, porque se produce un cambio en la estructura del ADN.
- **Mutación cromosómica**: Se produce un cambio en la estructura del cromosoma, bien porque se ha perdido algún segmento de un cromosoma, se intercambian fragmentos con otros cromosomas, etc.
- **Mutación genómica**: Afecta al cromosoma entero, alterando el número de cromosomas (*genoma*) del individuo, con algún cromosoma de más o de menos respecto al número normal de cromosomas de su especie.

Las *mutaciones* pueden ser **beneficiosas** cuando aumentan la probabilidad de supervivencia de una especie, **perjudiciales** (son las más comunes), cuando suponen una desventaja para la supervivencia de la especie y **neutras** cuando no producen ni beneficio ni perjuicio al individuo que la sufre.

6.2. ENFERMEDADES GENÉTICAS.

Una **enfermedad genética** es una patología causada por una alteración del *genoma*. Esta puede ser hereditaria o no. Si el gen alterado está presente en los *gametos* (óvulos y espermatozoides), esta será *hereditaria* (pasará de generación en generación), por el contrario si sólo afecta a las *células somáticas*, no será heredada.

Las *enfermedades genéticas* pueden ser *monogénicas*, *poligénicas* o *cromosómicas*.

- **Monogénicas**. Causadas por la *mutación* o alteración en la secuencia del ADN de un solo gen. A su vez, estas pueden ser:
  - **Autosómicas**: Si es *autosómica dominante*, la persona sólo necesita recibir el gen defectuoso de uno de los padres para heredar la enfermedad. Los hombres y las mujeres tienen la misma probabilidad de padecerla. Si es *autosómica recesiva*, sólo los individuos que hereden las dos copias del gen afectado (materna y paterna) heredarán la enfermedad. Los individuos con un solo gen afectado serán portadores de la enfermedad, pero no la expresarán. <u>Ejemplos</u>: *fibrosis quística* y *albinismo*.
  - **Ligadas a los cromosomas sexuales**. Si la herencia es *ligada al cromosoma X*, lo más común es que sea *recesiva*. En estos casos, la mujer es la portadora del gen anómalo, pero no padece la enfermedad. En cambio, cualquier varón que reciba el cromosoma X

anómalo sufrirá la enfermedad. Ejemplo: *hemofilia* y *daltonismo*. En la herencia *ligada al cromosoma Y*, sólo los varones padecerán esta enfermedad. Es muy poco frecuente.

- **Poligénicas** o **multifactoriales**. Cuando la enfermedad es el resultado de la acción conjunta de varios genes, más la interacción de éstos con los factores ambientales. No tiene un patrón de herencia establecido.
- **Cromosómicas**. Causadas por alteraciones en el número o estructura de los cromosomas. Ejemplo: *síndrome de Down*.

6.3. INGENIERÍA GENÉTICA.

La **ingeniería genética** se basa en la manipulación de genes (ADN) para obtener determinadas sustancias específicas aprovechables por los seres humanos: se trata de aislar (cortándolo de una molécula de ADN) el gen que produce la sustancia, e introducirlo en otro ser vivo que sea más sencillo y barato de manipular. Lo que se consigue es modificar las características hereditarias de un organismo, alterando su *material genético*.

La *ingeniería genética* tiene hoy en día múltiples aplicaciones, entre ellas:

- La producción de *insulina* o de la *hormona del crecimiento*.
- La fabricación de determinadas *vacunas*.
- La obtención de organismos resistentes a determinadas agresiones del ambiente o enfermedades (*organismos transgénicos*).

Un **organismo transgénico** es aquella planta, animal, hongo o bacteria a la que se le ha agregado por *ingeniería genética* uno o unos pocos genes de otro organismo con el fin de producir proteínas de interés industrial o bien mejorar ciertos rasgos, como la resistencia a plagas, la calidad nutricional, la tolerancia a heladas, entre otras características.

Además de la producción de *plantas y animales transgénicos*, y *clonación de animales*, la *ingeniería genética* presenta otras aplicaciones como la *terapia génica* para corregir o sustituir un gen alterado por uno no mutado, determinación de la huella genética del individuo, así como de enfermedades hereditarias o causadas por la alteración de un gen, creación de microorganismos modificados genéticamente para la elaboración de fármacos u otros productos, entre otros.

6.4. ALIMENTOS TRANSGÉNICOS.

Llamamos **alimentos transgénicos** a alimentos genéticamente modificados. Mediante la *ingeniería genética* han podido modificarse las características de gran cantidad de plantas para hacerlas más útiles al hombre, son las llamadas *plantas transgénicas*.

Se han conseguido plantas resistentes a productos químicos, insectos o enfermedades. Por ejemplo, ya existen semillas de algodón insensibles a herbicidas y *plantas transgénicas* que resisten invasiones de virus o que producen toxinas dañinas para algunos insectos.

En cuanto al uso de *productos transgénicos*, hay opiniones para todos los gustos: hay quien piensa que supone un gran avance para la humanidad, pero también hay quienes opinan que, a la larga, terminarán produciéndonos numerosos problemas y enfermedades.

7. EVOLUCIÓN DE LOS SERES VIVOS.

Desde que aparecieron las primeras formas de vida, los distintos organismos han sufrido cambios en su aspecto y en la forma de relacionarse con su entorno. Por eso, los habitantes del planeta han cambiado tanto en el devenir de su larga historia.

La **evolución biológica** es el proceso de *transformación de las especies* a lo largo del tiempo. La consecuencia de la *evolución biológica* es la aparición de nuevas especies.

La **evolución** ha originado la enorme diversidad de especies que hay en nuestro planeta. Todas ellas provienen de otras ya existentes. Así mismo, las especies actuales darán lugar a otras distintas en el futuro.

7.1. TEORÍAS SOBRE LA EVOLUCIÓN.

Existen distintas **teorías evolucionistas** sobre el origen de las especies, entre las que se encuentran: el **lamarckismo**, el **darwinismo** y la **teoría sintética** o **Neodarwinista**.

El **evolucionismo** afirma que todos los seres vivos actuales somos el resultado de una serie de cambios graduales que se han ido produciendo a partir de antecesores comunes. Actualmente para la comunidad científica la evolución es un hecho comprobado.

La teoría de la evolución de **Lamarck**, también conocida como **lamarckismo**”, defiende cuatro premisas fundamentales:

- Los organismos se ven “obligados” a adaptarse a las condiciones y exigencias del medio que habitan.
- Los cambios en el medio ambiente obligan a los organismos a desarrollar unos órganos y a reducir otros.
- La función crea el órgano.
- Los caracteres que se adquieren son heredables.

La teoría de la evolución de **Charles Darwin** o **darwinismo** defiende que los individuos de una población pueden presentar variaciones en diferentes rasgos heredables y mejoran su supervivencia o su capacidad reproductiva en el ambiente en el que están viviendo. Los individuos más exitosos tendrán una mayor descendencia en cada generación y el rasgo será más común en la población, hasta fijarse. Esta teoría se basa en la *selección natural*, principalmente.

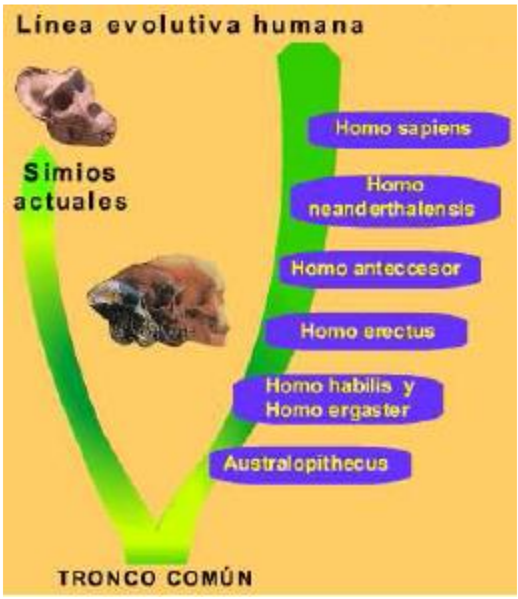
Los nuevos conocimientos en el campo de la genética llevaron a un grupo de científicos a formular una nueva teoría de la evolución, la **Teoría Sintética** o **Neodarwinista**, que proponía como principales motores del cambio evolutivo las **mutaciones**, la **recombinación génica** y la **selección natural**.

7.2. LA EVOLUCIÓN HUMANA.

Nuestra especie, el **Homo sapiens**, surgió hace sólo 100.000 años, pero los antepasados de los cuales procedemos se remontan a unos cuatro millones de años antes.

Los descubrimientos recientes hacen que nuestra línea evolutiva no sea definitiva, sino que se adapte a la nueva información que los científicos van aportando con sus investigaciones.

El ser humano pertenece a la familia de los homínidos, conjuntamente con los simios actuales, los chimpancés, el gorila y el orangután. Pero hay una relación de fósiles de homínidos que nos indican nuestra *línea evolutiva*.



En ella se puede ver cómo ha ido evolucionando el hombre *(Homo sapiens*) hasta nuestros días, desde nuestros ancestros (*Australophitecus*), hasta nuestro antecesor el *Homo Neanderthal*.

Unos de los yacimientos que más información ha proporcionado a los investigadores es el de *Atapuerca*, en Burgos.

7.3. LA HUMANIDAD Y LA EVOLUCIÓN.

Nuestra forma de vida nos ha llevado a relacionarnos con otras especies, unas veces de forma beneficiosa, como fuente de alimentos y otros recursos, pero en otras hemos provocado su desaparición tanto en el pasado como ahora en el presente.

En el pasado

La caza y el uso del fuego por el ser humano han sido los responsables de la desaparición de especies en el pasado, unido a veces a cambios climáticos naturales adversos.

En el presente

La principal consecuencia de la forma de vida del ser humano es la presión que está ejerciendo sobre las demás especies, llevándolas a su extinción.

La presión humana se debe a varias causas:

- La *caza*, el *coleccionismo* y el *comercio*, que afecta principalmente a especies exóticas.
- La *introducción de especies invasoras* que desplazan a las autóctonas provocando su desaparición.
- La *pérdida de hábitat* debido a la deforestación, la desecación de humedales y el urbanismo descontrolado.

- La *sobrepesca*, la *ganadería excesiva* y la *agricultura intensiva* son responsables de la desaparición de un gran número de especies con importancia alimenticia.

- La *contaminación del entorno natural* y *el cambio climático* que está sucediendo en la actualidad, están llevando a muchos ecosistemas a una situación límite.
- La *colonización de tierras y selvas* ha llevado a numerosas tribus al borde de su extinción, como los *bosquimanos*, los *yanomamis* y otras tribus primitivas.

ACTIVIDADES DEL TEMA 3: "GENÉTICA CELULAR".

1. **¿Qué tipo de células nos podemos encontrar en un organismo pluricelular?**
2. **Indica la diferencia entre una célula diploide y una célula haploide.**
3. **¿Qué son los gametos? ¿Y la fecundación?**
4. **Diferencias entre mitosis y meiosis.**
5. **¿Qué hay en el ADN?**
6. **Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones:**
   - El ARN es una molécula más grande y compleja que el ADN.
   - El ADN está formado por dos cadenas de nucleótidos complementarios.
   - La doble hélice es la estructura habitual del ARN.
   - En la molécula de ADN la guanina siempre se encuentra emparejada con la timina.
   - En el ADN solo existen tres tipos de nucleótidos.
7. **Ordena de manera descendente los siguientes términos (de mayor a menor contenido de material hereditario):**

   Genoma – Gen – Base nitrogenada – Cromosoma – Nucleótido
8. **Si una mujer y un hombre tienen un hijo, ¿cuántos cromosomas tendrán el espermatozoide y el óvulo? ¿Cuántos cromosomas tendrá el hijo?**
9. **¿Por qué los cromosomas tienen dos partes iguales?**
10. **¿Qué es un cariotipo?**
11. **Señala si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones, y corrige las respuestas falsas:**

Afirmación	V / F	Corrección (si procede)
▪ Una célula tiene la misma cantidad de ADN al inicio y al final de la interfase.		
▪ Cromosomas y cromatina están formados por la misma sustancia, el ADN, pero con distinto grado de empaquetamiento.		
▪ Cromatina y cromátida son lo mismo.		
▪ Un cromosoma puede considerarse como un conjunto de genes.		

12. **¿Qué es la genética?**
13. **¿Qué es un gen?**
14. **Completa correctamente las siguientes frases:**

    La ciencia que estudia la transmisión de los caracteres hereditarios se llama ____________. El primer científico que propuso unas leyes generales para explicar cómo se produce la herencia fue ____________. Si un organismo forma células especializadas para reproducirse se dice que su reproducción es ____________ y a dichas células se les llama ____________.

15. **Mendel eligió las plantas de guisante para sus experiencias porque …**
   - ☐ Poseían propiedades medicinales.
   - ☐ Tenían un precio muy razonable.
   - ☐ Eran fáciles de cultivar.
   - ☐ Eran muy nutritivas.
   - ☐ Presentaban rasgos de fácil observación.
16. **Completa correctamente las siguientes frases:**

   Los gametos se originan por un proceso de división llamado ____________. Al unirse en la ____________ originan una célula diploide llamada ____________ que contiene pares de cromosomas con los mismos genes denominados cromosomas ____________. Según la segunda ley de Mendel los alelos se ____________ durante la formación de los gametos y se combinan al azar entre los ____________.
17. **Relaciona las siguientes columnas:**

Fenotipo	Conjunto de genes de un individuo
Heterocigótico	Organismo o célula con un solo gen por carácter
Haploide	Individuo híbrido
Genotipo	Conjunto de caracteres manifestados por un ser
Recesivo	Gen o carácter que no se manifiesta en un híbrido

18. **Juan y María tienen los ojos marrones, su bebé, Alberto, tiene los ojos azules. ¿Cómo ha podido ocurrir esto?**
19. **Sabiendo que Juan tiene grupo sanguíneo AB y María tiene el mismo, determina el grupo sanguíneo de los posibles hijos.**
20. **Si un padre tiene factor Rh+ (con alelos Rr) y una madre tiene factor Rh- (con alelos rr), ¿cuál será el factor Rh de sus posibles hijos?**
21. **En Menorca, existen pollos del cruce de gallinas de plumaje negro (NN) con gallos de plumas blancas (nn), que tienen plumas de ambos colores. Es decir, en este caso el color negro y el blanco son codominantes. Sabiendo eso, determina que descendientes podemos obtener del cruce de dos híbridos con plumas de ambos colores.**
22. **En una especie de planta el color de las flores sigue una herencia intermedia entre el azul oscuro y el blanco. Si se cruzan dos razas puras de ambas variedades ¿cómo serán los descendientes?**
23. **Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones:**
   - Las mutaciones si aparecen en las células germinales sólo afectan al individuo en el que se originan y no se transmiten a los descendientes.
   - Las mutaciones favorecen el aumento de la diversidad.

- Las mutaciones pueden ser provocadas por factores ambientales.
- Las mutaciones son fallos en la duplicación del ADN o en la división celular.
- Las mutaciones monogénicas se producen por la alteración de varios genes.

24. **La hemofilia en el hombre depende de un alelo recesivo de un gen ligado al sexo. Una mujer no hemofílica cuyo padre sí lo era se casa con un hombre normal. ¿Qué probabilidad hay de que los hijos sean hemofílicos? ¿Y las hijas?**
25. **¿Qué es la ingeniería genética?**
26. **¿Es lo mismo el término organismo genéticamente modificado OGM y el término organismo transgénico?**
27. **¿Cómo explicaría Lamarck que la jirafa tenga un cuello tan largo?**
28. **¿Qué científico pensaba que la selección natural elimina a los que "casualmente" nacen con características poco apropiadas para sobrevivir, conservando a los "más aptos" que, a su vez, transmiten a la descendencia los rasgos "útiles" con los que nacieron?**

SOLUCIONES

1. **Solución**:

   En un *organismo pluricelular* existen dos tipos de células: **células somáticas** y **células germinales** o **sexuales**. Tanto unas como otras proceden de **células madre** originadas durante el desarrollo embrionario.

   Las *células somáticas* constituyen la mayoría de las células del cuerpo de un *organismo pluricelular*, por lo tanto, se encuentran en los huesos, la piel, los tejidos, los órganos o la sangre. Las *células somáticas* son **células diploides (2n)**, contienen toda la información genética de un individuo.

   Las *células germinales* o *sexuales* son las responsables de la formación de las *células reproductoras* o *gametos*, los *espermatozoides* en los hombres y los *óvulos* en las mujeres. Los *gametos* son **células haploides (n)**, contienen la mitad de la información genética de un individuo.

2. **Solución**:

   Las **células diploides** tienen *2n* cromosomas, siendo *n* el número de cromosomas de ese organismo o ser vivo. Las **células haploides** tienen *n* cromosomas.

3. **Solución**:

   Los **gametos** son *células sexuales reproductoras* que al fusionarse darán lugar a una única célula, llamada *cigoto*, que en su desarrollo origina una descendencia con características de ambos progenitores. Llamamos **fecundación** a la unión de los *gametos* para producir un nuevo individuo.

4. **Solución**:

   Las principales diferencias son que en la *mitosis* se obtienen dos células, mientras que en la *meiosis* se obtienen cuatro. En la *mitosis* cada *célula hija* tiene la misma cantidad de cromosomas que la célula original, mientras que en la *meiosis* las *células hijas* tienen la mitad de cromosomas que la célula original.

5. **Solución**:

   Cada uno de nosotros nace con un **código genético** único, un paquete de instrucciones guardadas dentro de las células. Estas instrucciones, que indican a nuestro cuerpo como deben funcionar, se encuentran dentro unas moléculas llamadas **ADN (ácido desoxirribonucleico)**.

   El paquete completo de instrucciones de *ADN*, está dividido en 23 “volúmenes de información” llamados **cromosomas**, los cuales los heredamos de nuestros padres. Tienes dos copias de cada uno de los *cromosomas*, uno de tu padre y otro de tu madre. Cada *cromosoma* consiste en miles de **genes**, que son las instrucciones actuales que dicen lo que tu cuerpo tiene que hacer. Estas instrucciones están escritas con cuatro “letras moleculares” llamadas **nucleótidos**, y pueden ser **A (adenina)**, **C (Citosina)**, **G (Guanina)** y **T (Timina)**.

La mayor parte del *código genético* es muy similar entre todas las personas. Pero todos llevamos también pequeñas diferencias en el ADN que nos hace únicos. La razón por la que nos diferenciamos unos de otros es porque hemos heredado diferencias en las letras del *código genético*, en un sitio determinado de las instrucciones.

6. **Soluciones**:
   - El ARN es una molécula más grande y compleja que el ADN. [F]
   - El ADN está formado por dos cadenas de nucleótidos complementarios. [V]
   - La doble hélice es la estructura habitual del ARN. [F]
   - En la molécula de ADN la guanina siempre se encuentra emparejada con la timina. [F]
   - En el ADN solo existen tres tipos de nucleótidos. [F]
7. **Solución**:

   Genoma – Cromosoma – Gen – Nucleótido – Base nitrogenada
8. **Solución**:

   Tanto el **espermatozoide** como el **óvulo** tienen 23 cromosomas, de modo que, una vez fecundados, la *célula huevo* que dará lugar al hijo tenga 23 + 23 = 46 cromosomas.
9. **Solución**:

   Cada **cromosoma** tiene dos partes iguales (las **cromátidas**) porque durante la *interfase* la *molécula de ADN* que lo forma se duplica. La duplicación es necesaria para garantizar que, cuando la célula se divida en la reproducción, las *células hijas* reciban los mismos cromosomas que la *célula madre*.
10. **Solución**:

    El **cariotipo** es la representación de los cromosomas de una especie. En él se ve el número, el tamaño y la forma de los *cromosomas metafásicos* de un determinado organismo.

    En el caso de los seres humanos, el cariotipo muestra 22 parejas de cromosomas que son iguales en ambos sexos (**autosomas**), y dos cromosomas sexuales (**heterocromosomas**), llamados XX para la mujer y XY para el hombre.
11. **Soluciones**:

Afirmación	V / F	Corrección (si procede)
▪ Una célula tiene la misma cantidad de ADN al inicio y al final de la interfase.	F	*La cantidad de ADN al final de la interfase es el doble que al principio.*
▪ Cromosomas y cromatina están formados por la misma sustancia, el ADN, pero con distinto grado de empaquetamiento.	V	
▪ Cromatina y cromátida son lo mismo.	F	*La cromatina es el ADN de la célula durante la interfase, mientras que la cromátida es cada parte de un cromosoma, como resultado de la duplicación del ADN. Los cromosomas y las cromatidas solo se visualizan durante la división.*
▪ Un cromosoma puede considerarse como un conjunto de genes.	V	

12. **Solución**:

La **genética** es la ciencia que estudia la *herencia biológica*, es decir, los mecanismos de transmisión de los *caracteres biológicos* de generación en generación, y como éstos se expresan en cada persona. La *herencia biológica* se encuentra en el ADN presente en cada una de nuestras células.

13. **Solución**:

Un pequeño fragmento de ADN que contiene la información necesaria para que se exprese un determinado *carácter* en un individuo (por ejemplo el color de ojos o de la piel).

14. **Soluciones**:

La ciencia que estudia la transmisión de los caracteres hereditarios se llama **Genética**. El primer científico que propuso unas leyes generales para explicar cómo se produce la herencia fue **Mendel**. Si un organismo forma células especializadas para reproducirse se dice que su reproducción es **sexual** y a dichas células se les llama **gametos**.

15. **Soluciones**:

☐ Poseían propiedades medicinales.

☐ Tenían un precio muy razonable.

☒ Eran fáciles de cultivar.

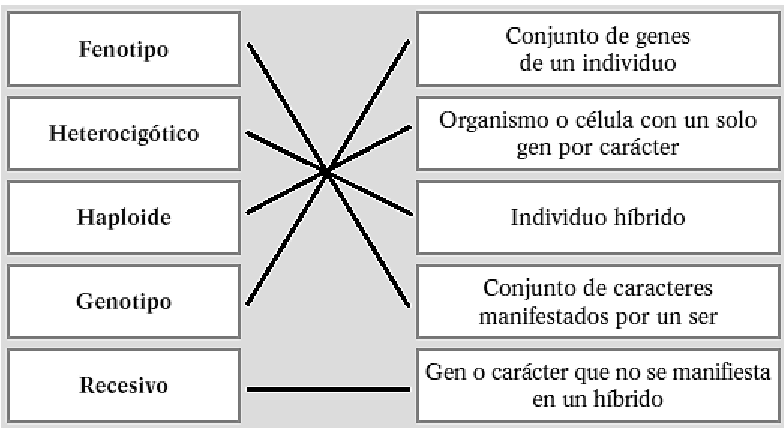
☐ Eran muy nutritivas.

☒ Presentaban rasgos de fácil observación.

16. **Soluciones**:

Los gametos se originan por un proceso de división llamado **meiosis**. Al unirse en la **fecundación** originan una célula diploide llamada **cigoto** que contiene pares de cromosomas con los mismos genes denominados cromosomas **homólogos**. Según la segunda ley de Mendel los alelos se **separan** durante la formación de los gametos y se combinan al azar entre los **descendientes**.

17. **Soluciones**:



18. **Solución:**

A = color marrón (gen dominante); a = color azul (gen recesivo).

	Genotipo del Padre	
Genotipo de la Madre	**Alelo A**	**Alelo a**
Alelo A	AA	Aa
Alelo a	Aa	aa

Genotipo de los posibles descendientes: 75% de ojos marrones y 25% de ojos azules.

Aa y *Aa* tendrán *fenotipo marrón*, mientras *aa* tendrá *fenotipo azul*.

Esto ha podido ocurrir porque tanto Juan como María tenían un antepasado con los ojos azules que les dejó en su código genético este "gen recesivo", como muestra la tabla anterior. En realidad el color de los ojos depende de varios genes y la cosa es algo más complicada.

19. Solución:

	Genotipo del Padre	
Genotipo de la Madre	**Alelo A**	**Alelo B**
Alelo A	AA	AB
Alelo B	AB	BB

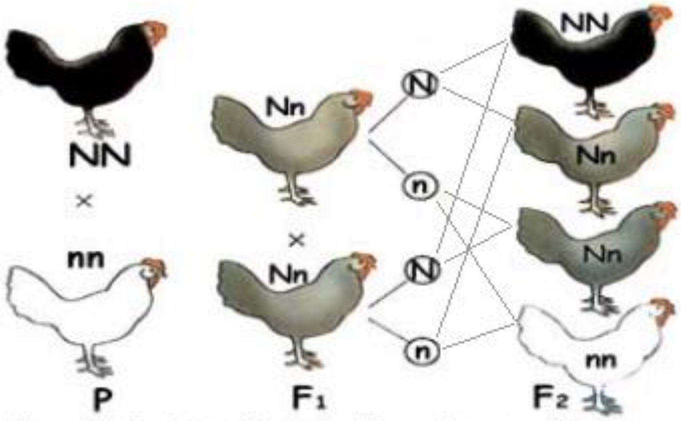
Los grupos sanguíneos de los posibles hijos serán: 25% del grupo A, 25% del grupo B y 50% del grupo AB.

20. Solución:

	Genotipo del Padre	
Genotipo de la Madre	**Alelo R**	**Alelo r**
Alelo r	Rr	rr
Alelo r	Rr	rr

El factor Rh de los posibles hijos será: 50% tendrá Rh+ y el otro 50% tendrá Rh-.

21. Solución:



Herencia intermedia en gallinas de raza Menorca

22. Solución:

	Genotipo planta flores azules	
Genotipo planta flores blancas	**Alelo A**	**Alelo A**
Alelo B	AB	AB
Alelo B	AB	AB

Todos los descendientes tendrán flores de color azul claro.

23. Soluciones:

- Las mutaciones si aparecen en las células germinales sólo afectan al individuo en el que se originan y no se transmiten a los descendientes. [F]
- Las mutaciones favorecen el aumento de la diversidad. [V]
- Las mutaciones pueden ser provocadas por factores ambientales. [V]
- Las mutaciones son fallos en la duplicación del ADN o en la división celular. [V]
- Las mutaciones monogénicas se producen por la alteración de varios genes. [F]

24. Solución:

Mujer XX^h (portadora, ya que el padre era hemofílico X^hY), Hombre XY.

	Genotipo de la mujer	
Genotipo del hombre	**X**	**X^h**
X	XX	XX^h
Y	XY	X^hY

La probabilidad de que tengan un hijo varón hemofílico es del 50%. La probabilidad de que tengan una hija hemofílica es ninguna. Las hijas serán sanas, la mitad portadoras.

25. Solución:

La **ingeniería genética** es el conjunto de técnicas por las que se modifica el ADN de los organismos persiguiendo de diversos objetivos.

26. Solución:

Aunque a veces se utilizan como sinónimos, el término **organismo genéticamente modificado (OGM)**, se aplica a un ser cuyos genes han sido alterados de manera artificial, reservándose el nombre de **organismo transgénico** para designar al que contienen genes procedentes de otras especies. Los alimentos que los contienen son los llamados **alimentos transgénicos**.

27. Solución:

Por la ley del uso y desuso y la herencia de los caracteres adquiridos.

28. Solución:

Charles Darwin.

Tema 4. Salud y enfermedad

1. Salud y tipos de enfermedades

La **salud** es el estado de completo **bienestar** físico, mental y social, y no solamente la ausencia de afecciones o enfermedades.

La salud **depende** del estilo de vida, las características biológicas, factores ambientales y la asistencia médica.

Una **enfermedad** es una alteración en la estructura o funcionamiento del organismo que afecta negativamente al estado de bienestar. Según su origen, las enfermedades pueden ser **infecciosas** o no **infecciosas.** Los **síntomas** de una enfermedad se conocen como **cuadro clínico.** Estos permiten el diagnóstico de la enfermedad para someterla al tratamiento adecuado.

Las enfermedades de corta duración y que se producen muy rápido se llaman **enfermedades agudas.** Las que aparecen lentamente y se prolongan en el tiempo se conocen como **crónicas.** Si una enfermedad afecta a un número de personas muy superior al esperado durante un tiempo determinado, se habla de **epidemia.**

2. Enfermedades no infecciosas

Las **enfermedades no infecciosas** son aquellas que no son producidas por ningún germen patógeno y, por tanto, no son contagiosas.

Las **causas** que las producen son: factores ambientales (contaminación y presión social), malos hábitos (consumo de drogas), golpes y traumatismos, alteraciones genéticas y el envejecimiento.

Tipos de enfermedades no infecciosas		
Clases	**Descripcción**	**Ejemplos**
Genéticas	Causadas por genes mutados, duplicados o ausentes.	Daltonismo, hemofilia.
Fisiológicas	Afectan al funcionamiento de los órganos.	Afecciones cardíacas, respiratorias, óseas o musculares.
Traumáticas	Provocadas por golpes derivados de accidentes.	Parálisis del aparato locomotor olesiones cerebrales.
Metabólicas	Causadas por un mal funcionamiento de las glándulasendocrinas o exocrinas.	Obesidades y diabetes.
Celulares	Se producen cuando las células comienzan a dividirsede manera incontrolada.	Tumores benignos y cáncer.
Mentales	Se deben a alteraciones de la personalidad o de laconducta por trastornos neurológicos.	Estrés y depresión.

2.1. Prevención de enfermedades no infecciosas

Para evitar las enfermedades no infecciosas podemos adoptar **hábitos saludables** como:

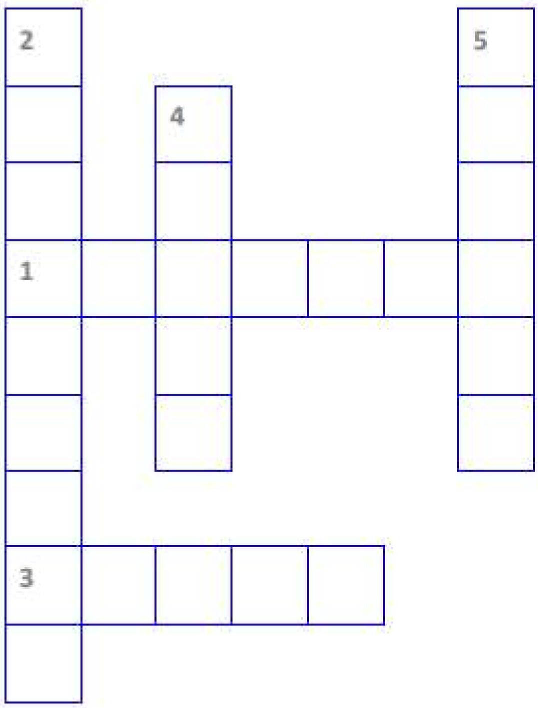
- No fumar ni consumir alcohol u otras drogas.
- Descansar adecuadamente.
- Mantener una dieta equilibrada.
- Realizar ejercicio físico de forma habitual.
- Acudir a revisiones médicas periódicas.

ACTIVIDADES

1. ¿En qué se diferencian una enfermedad crónica y una enfermedad aguda?

2. ¿Qué factores determinan nuestra salud?

3. Resuelve el siguiente crucigrama:
    1. Tipo de enfermedad que se produce cuando las células comienzan a dividirse.
    2. Para permitir al organismo recuperarse, debemos...
    3. Tipo de enfermedad que se produce rápidamente y tiene corta duración.
    4. Causa de enfermedades no infecciosas que puede provocar lesiones para el organismo.
    5. Enfermedad mental que provoca ansiedad, entre otros.



4. Completa las frases:
   a) Para evitar la aparición de enfermedades no infecciosas debemos mantener una_______________ equilibrada.
   b) No____________ni consumir alcohol ni otras___________evita la aparición de enfermedades cancerígenas.
   c) Las enfermedades no infecciosas se pueden deber factores sociales, malos hábitos, envejecimiento,_____genéticas,_____________y traumatismos.
   d) Los infartos y las afecciones____________se deben a causas fisiológicas.

5. Define estos conceptos con tus propias palabras:
   a) Salud.
   b) Enfermedad.
   c) Epidemia.

6. ¿Qué medidas de prevención deberías adoptar para prevenir las siguientes enfermedades?
   a) Un cáncer de pulmón.
   b) Una cirrosis.
   c) Un infarto.
   d) Un exceso de colesterol.

3. Enfermedades infecciosas

Las **enfermedades infecciosas** son aquellas causadas por **gérmenes** (microbios o virus) que penetran en nuestro cuerpo y se reproducen en su interior.

Hay cuatro tipos de gérmenes:

- **Virus:** compuestos por material genético envuelto por una cápsula de proteínas.
- **Bacterias:** organismos unicelulares sin núcleo que se reproducen rápidamente.
- **Protozoos:** organismos unicelulares con núcleo que viven en ambientes húmedos.
- **Hongos:** organismos pluricelulares eucariotas que no suelen ser peligrosos para una persona sana.

3.1. Transmisión de infecciones

Para que se produzca una infección deben intervenir varios elementos:

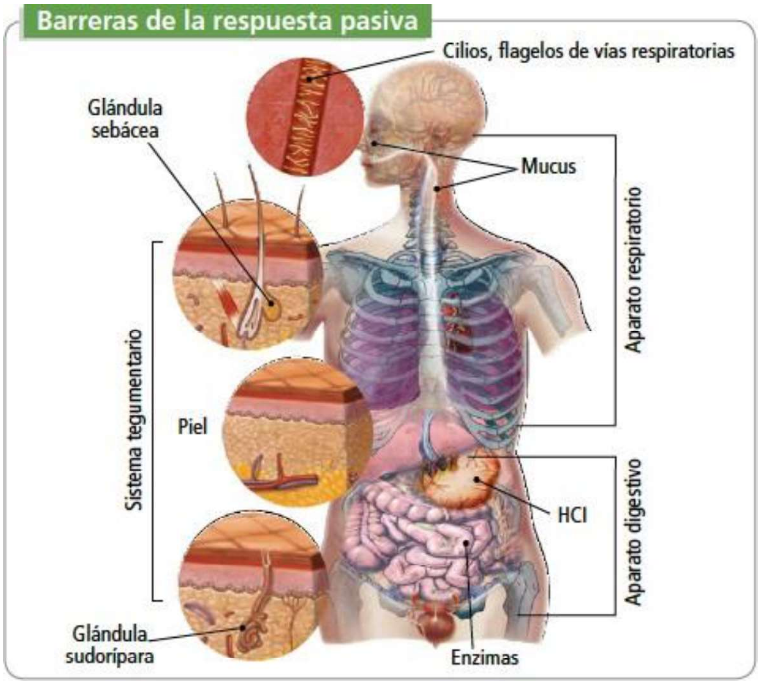
- **Fuente de infección:** personas o animales afectados por la enfermedad y que contienen gérmenes infecciosos.
- **Mecanismo de transmisión:** sistema por el que los microorganismos pasan de la fuente de infección al huésped. La transmisión puede ser directa (por contacto físico o por vía respiratoria) o indirecta (a través de utensilios contaminados, del aire, el agua, polvo o alimentos o de animales)
- **Huésped:** individuo en el que se desarrolla la infección.

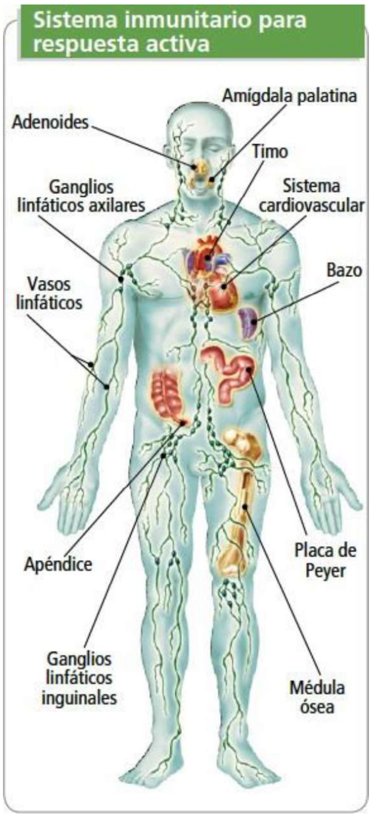
3.2. Defensa contra enfermedades infecciosas

Para defenderse de la infección, nuestro cuerpo dispone de dos clases de **mecanismos de defensa:**

- **Barreras** o **respuesta pasiva:** piel, mucosas, cilios de las vías respiratorias, saliva, lágrimas, etc., que impiden la entrada de microorganismos.
- **Sistema inmunitario** o **respuesta activa:** defensas que se activan cuando los patógenos ya han entrado. Se basa en la actuación de 2 tipos de glóbulos blancos:
  - **Respuesta inmunitaria inespecífica:** la realizan los fagocitos, atacando a células extrañas al cuerpo.
  - **Respuesta inmunitaria específica:** la realizan los linfocitos (T o B). Reconocen sustancias extrañas y fabrican anticuerpos, que señalan estas sustancias para que los fagocitos las eliminen.

Una vez producida la infección, hay cuatro fases antes de volver al estado inicial de salud: la de **incubación** (tiempo desde la invasión hasta los primeros síntomas), la de **enfermedad inespecífica** (signos de diversas dolencias), la **aguda** (primeras evidencias típicas de la enfermedad) y la de **convalecencia** (tiempo que necesita el cuerpo para recuperarse).





3.3. Tratamiento de enfermedades infecciosas

La lucha contra las enfermedades infecciosas se puede hacer usando:

a) **Tratamientos preventivos** (vacunas) Para prevenir enfermedades infecciosas se utiliza la **vacuna,** que es una suspensión de microorganismos atenuados o muertos que se introduce en el organismo para que produzcan anticuerpos (repuesta inmunitaria especifica) pero sin que se genere la enfermedad.

b) **Tratamientos curativos** (una vez que el organismo ya está siendo atacado por el agente patógeno). Para ello contamos con distintos medicamentos:

- **Sueros:** preparados con anticuerpos específicos de una enfermedad.

- **Antibióticos:** sustancias químicas capaces de paralizar el desarrollo de ciertos microorganismos patógenos. Si no se usan bien, causan resistencia en las bacterias, dejando de tener efecto.
- **Antivirales:** sustancias químicas que pueden bloquear la acción de los virus.
- **Fungicidas** y **antiparasitarios:** medicamentos contra hongos y parásitos.

3.4. Hábitos saludables para la prevención

- Taparse boca y nariz con un pañuelo al estornudar.
- Mantener limpias las manos y los utensilios del hogar.
- Mantener hábitos de higiene corporal y de nuestros animales domésticos.
- Consumir alimentos y bebidas sin gérmenes.
- Desinfectar cualquier herida.
- No automedicarse y huir de opiniones de personas no especialistas en medicina.

ACTIVIDADES

7. Investiga en Internet para relacionar los siguientes microorganismos con las enfermedades infecciosas que causan:

a) Hepatitis
b) Sarampión
c) Gripe
d) Meningitis
e) Infecciones intestinales
f) Malaria
g) Candidiasis
h) Toxoplasmosis
i) Varicela
j) Rubeola
k) Pie de atleta
l) Neumonía
m) Salmonelosis
n) Diarre
o) Rabia
p) Botulismo

1. Virus
2. Bacterias
3. Protozoos
4. Hongos

8. Nombra los distintos tipos de tratamientos que existen para tratar las enfermedades infecciosas. ¿Alguna vez has tomado alguno de ellos?

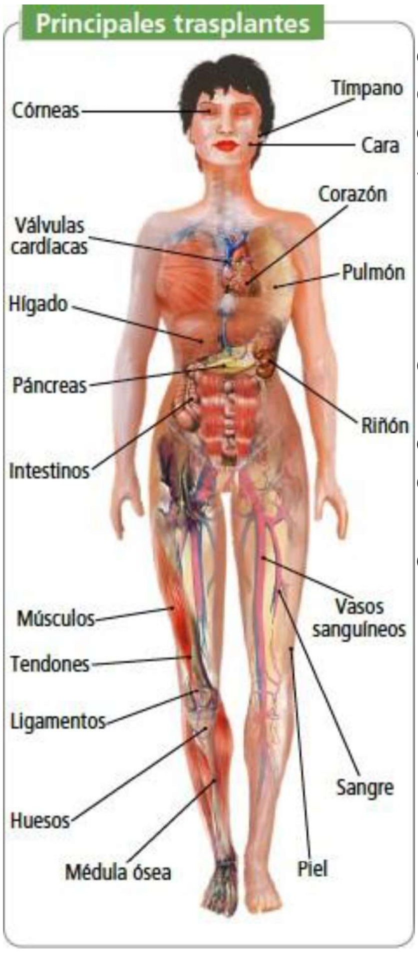
9. Nombra las barreras que participan en las siguientes situaciones:
   a) Herida provocada por una astilla.
   b) Infección alimentaria.
   c) Infección bacteriana por primera vez.
   d) Un virus por el que ya se estuvo enfermo.

10. Completa este texto con las siguientes palabras: **picor, sangre, piel, bacterias, organismo, cantidad, herida, calor.**

La respuesta inflamatoria se produce cuando los tejidos son lesionados por
______, traumatismos, toxinas, calor o cualquier otra causa. Al producirse una
______, los gérmenes que se introducen en la____son atacados por los fagocitos. Esto da lugar a una respuesta caracterizada por cuatro procesos: tumor, rubor,
______ y picor. La zona afectada se hincha (tumor) por la llegada de más riego sanguíneo para traer mayor__________de fagocitos. La llegada de _ va acompañada del enrojecimiento (rubor) y del aumento de la temperatura (calor de la sangre). Por último, el ______es la sensación provocada por la gran actividad celular en el área dañada. La hinchazón (edema) puede presentarse en una zona muy concreta (localizada) o en zonas más amplias del_____(generalizada).

4. Donación y trasplante

Un **trasplante** consiste en la sustitución de un órgano vital o tejido enfermo, sin posibilidad de recuperación, por otro que esté sano.



La **donación** de células, tejidos y órganos permite trasplantar estos componentes del **donante** al **receptor** para solucionar diferentes enfermedades.

Si las células o tejidos provienen del mismo paciente hablamos de autotrasplante. Si el donante es un animal, hablamos de **xenotrasplante.**

Los problemas fundamentales de los trasplantes son:

- **Escasez de donantes:** es necesario realizar campañas de concienciación.
- **Rechazos:** debido al ataque del sistema inmunitario del donante. Se deben elegir los donantes más idóneos y emplear técnicas de inmunodepresión.
- **Enfermedades oportunistas:** debido a la falta de defensas del paciente.
- **Limitaciones técnicas.**

5. **Accidentes y primeros auxilios**

Un **accidente** es cualquier suceso provocado por una acción violenta y repentina, ocasionada por un agente externo involuntario y que da lugar a una **lesión corporal.**

Para evitar los accidentes debemos adoptar algunas **precauciones básicas:**

- Respetar las **señales de circulación vial.**
- Trabajar en **condiciones seguras,** sin hacer actividades para las que no se tiene formación.
- Ser **precavidos** con los aparatos eléctricos.
- Utilizar ropa y **sistemas de protección** adecuados.
- Realizar **actividades físicas progresivas.**
- **Revisar** los vehículos y dispositivos deportivos con frecuencia.

Ante posibles lesiones se debe **solicitar ayuda médica.** Si esta ayuda va a retrasarse, debemos realizar actuaciones de **primeros auxilios:**

- **Golpes:** acomodar a la persona, poner hielo y no moverla.
- **Fracturas en los miembros:** inmovilizar el miembro dañado.
- **Hemorragias:** desinfectar la herida y taparla con una gasa.
- **Quemaduras:** mojar a herida con agua fría y poner crema hidratante o aceite si se conserva la piel. Si no, ir al médico.
- **Intoxicaciones por líquidos:** evitar provocar el vómito.
- **Intoxicaciones por gases:** ventilación inmediata y evacuación.
- **Asfixia:** liberar la obstrucción.
- **Picaduras de animales:** lavar bien la herida con agua, quitar los restos de aguijones y aplicar hielo.
- **Lipotimia:** tumbar a la persona con las piernas elevadas en un lugar ventilado, así como aflojarle la ropa.
- **Ansiedad:** tranquilizar a la persona, respirar lentamente y con los ojos cerrados.
- **Parada cardiorrespiratoria:** reanimación cardiopulmonar (RCP).

ACTIVIDADES

11. ¿Qué es un accidente doméstico? ¿Alguna vez has sufrido alguno?

12. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

	V	F
a) Las enfermedades infecciosas se producen aunque nos lavemos diariamente.		
b) Consumir bebidas no causa enfermedades infecciosas.		
c) Las mascotas sin control veterinario son un peligro para la salud.		
d) Las vacunas solo se administran a los bebés.		
e) Hay que estornudar con la boca destapada para liberar todo el aire.		

13. Dibuja un cuerpo humano y señala en él los principales órganos que se pueden trasplantar.

14. Une cada término con su definición:

a) Ceder células, tejidos y órganos que permiten trasplantar estos componentes del donante al receptor.	**1. Rechazo**
b) Sustitución de un órgano enfermo por uno sano.	**2. Donación**
c) Suceso provocado por una acción violenta y repentina ocasionada por un agente externo.	**3. Autotrasplante**
d) Cuando donante y receptor son la misma persona.	**4. Accidente**
e) Ataque por parte del sistema inmunitario del donante hacia el órgano o tejido trasplantado.	**5. Trasplante**

15. ¿De qué forma debemos actuar en cada uno de estos casos? Decídelo con tu compañero o compañera.

a) Golpes.
b) Hemorragias.
c) Fracturas.
d) Quemaduras.
e) Intoxicaciones por líquidos.
f) Asfixia.
g) Lipotimia.
h) Picaduras de animales.
i) Parada cardiorrespiratoria.
j) Ansiedad.

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 11: GENÉTICA. SALUD. PROBABILIDAD.

TEMA 5. PROBABILIDAD.

1. AZAR Y PROBABILIDAD.

En la vida diaria empleamos a menudo expresiones como: “Imposible que ocurra”, “Probablemente lloverá”, “¡Qué casualidad!”, “Que tengas suerte”…, referidas a situaciones en las que no sabemos de antemano qué va a suceder, situaciones cuyo resultados se deben al **azar**.

La historia de la **probabilidad** matemática va ligada a la de los juegos de azar, principalmente a los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos.

Pierre Simón de Laplace, en el siglo XIX, fue el primero que formalizó las teorías existentes en su libro “*Teoría filosófica de las Probabilidades*”.

2. TIPOS DE EXPERIMENTOS.

Hay experimentos en los que al repetirlos en igualdad de condiciones se obtiene siempre el mismo resultado. En otros experimentos, aun manteniendo las mismas condiciones, no podemos predecir su resultado (los resultados varían). Dependen del *azar*.

- **Experimentos deterministas**. Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen. Ejemplo: si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará. Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo, pero después bajará.
- **Experimentos aleatorios**. Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del *azar*. Ejemplos: si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz. Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener. Cada vez que realizamos una vez un experimento de este tipo se dice que se ha efectuado una *prueba*.

Del estudio de experimentos como el lanzamiento de un dado o de la extracción de una carta de la baraja, se encarga la *probabilidad*.

La **Probabilidad** es la rama de las matemáticas que estudia ciertos experimentos llamados *aleatorios*, o sea regidos por el *azar*, en el que se conocen todos los resultados posibles, pero no es posible tener certeza de cuál será en particular el resultado del experimento.

La *probabilidad* mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un *experimento aleatorio*, bajo condiciones suficientemente estables.

2.1. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS.

Consideremos un *experimento aleatorio* cualquiera, aunque no sepamos lo que ocurrirá cuando realicemos una prueba, sí que sabemos cuáles son todos los resultados que se pueden dar.

Si por ejemplo, se tira un dado de parchís sabemos que puede salir un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 o un 6; si se lanza una moneda saldrá "cara" o saldrá "cruz"

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**. Se suele designar con la letra **Ω** y los posibles resultados se escriben entre llaves.

Ejemplo: Si lanzamos un dado, el *espacio muestral* son todos los posibles resultados.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del *espacio muestral*. Un *suceso* puede ser un posible resultado unitario o pueden ser varios.

Ejemplo: Si lanzamos un dado, unos *sucesos* pueden ser:

$$A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{3\},\ D = \{1, 3\},\ F = \{2, 4, 6\}$$

Tipos de sucesos

- Se llama **suceso elemental** o **simple** a cada uno los posibles resultados que obtenemos en un *experimento aleatorio*. Se produce cuando el *suceso* solo tiene un elemento. Por tanto, es una parte del *espacio muestral*. Ejemplo: si lanzamos un dado, un *suceso simple* es sacar un 1: $A = \{1\}$; o sacar un 5: $B = \{5\}$.
- Se llama **supuesto compuesto** a cada *suceso* formado por dos o más elementos del *espacio muestral*. Se produce cuando el *suceso* está formado por más de un *suceso simple*. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso compuesto será sacar número par: $A = \{2, 4, 6\}$.
- Se llama **suceso seguro** al *suceso* que siempre se verifica. El mismo *espacio muestral* es un *suceso seguro*. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso seguro sería sacar menos de 7: $A = \{1, 2, 3,4, 5, 6\}$.
- Se llama **suceso imposible** al *suceso* que no puede ocurrir nunca. Se representa por el símbolo de conjunto vacío, **Ø**, ya que no contiene ningún elemento. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso imposible sería sacar un 7: $A = \emptyset$.
- **Sucesos compatibles**. Son aquellos que tienen algún elemento en común, es decir, si pueden suceder a la vez. Ejemplo: Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:
  - Extraer un número par: $A = \{2, 4, 6\}$.
  - Extraer un número menor de 4: $B = \{1, 2, 3\}$.

  Ambos sucesos son *compatibles* porque tienen un elemento común, el *2.*
- **Sucesos incompatibles**. Son aquellos que no tienen ningún elemento en común. Ocurre cuando dos *sucesos* no pueden ocurrir a la vez. Ejemplo: al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:
  - Extraer un número par: $A = \{2, 4, 6\}$.
  - Extraer el 1: $B = \{1\}$.

  Ambos sucesos son *incompatibles* porque no tienen elementos comunes.
- Si A es un *suceso*, llamaremos $\bar{A}$, al **suceso contrario**, al que se verifica cuando no se verifica A. Lo forman los *sucesos elementales* que no están en A. Dos sucesos son *contrarios* si son *incompatibles* y entre ambos contienen a todos los elementos del *espacio muestral*. Ejemplo: Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:

- Extraer un número par: $A = \{2, 4, 6\}$.
- Extraer un número impar: $B = \{1, 3, 5\}$.

Ambos sucesos son *contrarios* porque son incompatibles (no tienen elementos comunes) y además, entre ambos completan el espacio muestral, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.2. OPERACIONES CON SUCESOS.

Unión e intersección de sucesos

Dados dos sucesos *A* y *B* de un espacio muestral Ω, llamaremos:

- Llamaremos suceso **unión de A y B**, $\boldsymbol{A \cup B}$, al suceso que se cumple siempre que ocurra ***A* o *B***, alguno de los dos. Se forma juntando los sucesos elementales de *A* y de *B*.
- Llamaremos suceso **intersección de A y B**, $\boldsymbol{A} \cap B$, al suceso que se cumple siempre que ocurran ***A* y *B*** a la vez. Lo forman los sucesos elementales que tienen en común *A* y *B*.

Ejemplo: Consideremos el experimento de tirar un dado y los sucesos *A* y *B*:

A = "salir nº impar" y *B = "salir mayor que 3"*

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{5\}$

Cuando la *intersección* de dos sucesos es el *suceso imposible*, es decir que no pueden ocurrir simultáneamente nunca, se dice que ambos son *incompatibles*.

A y *B* incompatibles si, $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$.

Propiedades de las operaciones con sucesos

La *unión* e *intersección* de sucesos y el *suceso contrario* a uno dado, cumplen:

- La unión de un suceso y su contrario es el *suceso seguro*, la intersección es el *suceso imposible*.

$$\boldsymbol{A \cup \bar{A} = \Omega}\ ;\ \boldsymbol{A \cap \bar{A}} = \emptyset$$

- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

$$\overline{\boldsymbol{A \cup B}} = \boldsymbol{\bar{A} \cap \bar{B}}$$

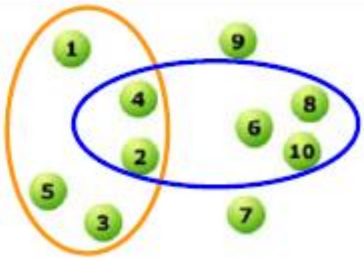
- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

$$\overline{\boldsymbol{A \cap B}} = \boldsymbol{\bar{A} \cup \bar{B}}$$

- El contrario de $\bar{A}$ es *A*.

$$\boldsymbol{\bar{\bar{A}} = A}$$

Ejemplo: En el experimento de extraer una bola de una bolsa que contiene diez bolas numeradas, sean los sucesos *A* y *B*.



A = "salir menor que 6"   *B = "salir par"*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cup \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 9\} = \overline{A \cup B}$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \overline{A \cap B}$

3. PROBABILIDAD.

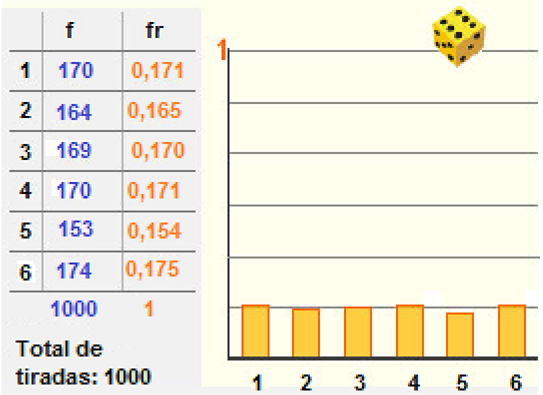
3.1. PROBABILIDAD DE UN SUCESO.

La **probabilidad de un suceso**, **A**, indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1, y lo escribimos **P(A)**.

Si *P(A)* está próxima a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuanto más se aproxime a 1, que es la probabilidad del suceso seguro, $P(\Omega) = 1$.

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la *frecuencia relativa* con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumenta el número de pruebas realizadas.

Este resultado, conocido como **ley de estabilidad de las frecuencias**, nos lleva a definir la *probabilidad de un suceso* como el número hacia el que tiende la *frecuencia relativa* al repetir el experimento muchas veces.



	f	fr
1	170	0,171
2	164	0,165
3	169	0,170
4	170	0,171
5	153	0,154
6	174	0,175
	1000	1

Ejemplo 1: Al tirar el dado muchas veces se observa que la frecuencia relativa de cada una de las caras se estabiliza en torno a 1/6.

Esta es la probabilidad que asignaremos a cada una de las caras.

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$.

Donde *f* es la *frecuencia absoluta* y *fr* la *frecuencia relativa*. La suma de las *frecuencias relativas* siempre es 1.

Ejemplo 2: Se lanza 1 000 veces una chincheta. Los resultados son los siguientes:

	f	fr
	327	0,327
	673	0,673
Total:	1000	1

Observamos que en el caso de la chincheta, las frecuencias relativas de CH_1 (punta hacia arriba) y CH_2 (hacia abajo) son muy distintas de 0,5.

Sus *probabilidades* son números desconocidos, pero seguramente próximos a sus *frecuencias relativas*.

Como *fr* de $CH_1 = 0,327$ y *fr* de $CH_2 = 0,673 \rightarrow P(CH_1) = 0,327$ y la $P(CH_2) = 0,673$.

3.2. PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS REGULARES. LEY DE LAPLACE.

Cuando varios sucesos tienen la misma *probabilidad* de ocurrir al realizar un fenómeno aleatorio se dice que son **equiprobables**.

Si en un espacio muestral todos los *sucesos elementales* son *equiprobables*, el fenómeno aleatorio es **regular** y se puede calcular mediante la **Regla de Laplace**, que dice: "*la probabilidad de un suceso cualquiera A, es el cociente entre la cantidad de casos favorables al suceso A y la cantidad de casos posibles del espacio muestral*".

Se suele enunciar así:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo 1: Consideremos el fenómeno aleatorio que consiste en lanzar un dado. Calcula la probabilidad de “sacar un número mayor a 4”.

El número de casos favorables en este caso son 2, ya que hay dos posibles resultados mayores que 4 y el número de casos posibles es 6, ya que hay 6 posibles resultados. Por tanto:

A = “Sacar un número mayor a 4” = {5, 6} → P(A) = 2/6 = 1/3.

Ejemplo 2: Consideremos el fenómeno aleatorio que consiste en extraer al azar una bola de una bolsa que contiene tres bolas blancas y dos bolas negras. Calcula la probabilidad de “sacar bola blanca” y “sacar bola negra”.

Los casos posibles parecen ser “bola blanca” y “bola negra”, pero, así planteado, el modelo no es *regular*. Parece claro que es más probable sacar una bola blanca que una negra. Reflexionando sobre nuestro fenómeno, lo que se elige al azar es una bola. Dado que todas ellas son iguales (misma forma), podíamos decir que es tan probable elegir una bola como elegir cualquier otra. Con lo que el espacio de posibilidades, una vez numeradas las bolas, es el siguiente:

$$\Omega = \{blanca_1, blanca_2, blanca_3, negra_4, negra_5\}$$

Este nuevo espacio de posibilidades es uniforme, debido a que la probabilidad cada uno de los sucesos simples es *1/5*.

En este espacio de posibilidades los sucesos “sacar bola blanca” y “sacar bola negra” son sucesos compuestos.

A = “Sacar bola blanca” = $\{blanca_1, blanca_2, blanca_3\}$

B = “Sacar bola negra” = $\{negra_4, negra_5\}$

Aplicando la *Regla de Laplace* a estos sucesos:

P(A) = P(“Sacar bola blanca”) = 3/5.

P(B) = P(“Sacar bola negra”) = 2/5.

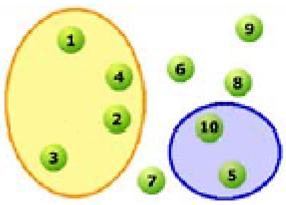
Los resultados parecen razonables y además, la suma de las probabilidades de ambos sucesos da 1.

3.3. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

Al asignar probabilidades mediante la *regla de Laplace* o utilizando la *frecuencia relativa* puedes comprobar que se cumple:

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.
- La probabilidad del *suceso seguro* es 1. $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.
- La probabilidad del *suceso imposible* es 0. $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$.
- La probabilidad de la unión de dos *sucesos incompatibles* es: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
- La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto, la probabilidad del suceso contrario es: $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

Ejemplo 1: En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, se extrae una al azar. Si *A* = *"Sacar un nº menor que 5"* y *B* = *"Sacar un nº múltiplo de 5"*, siendo *A* y *B* incompatibles:

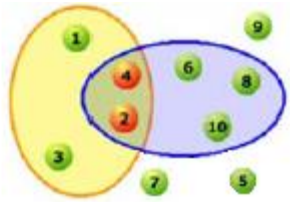


$P(A) = 4/10 \ = 0{,}4$

$P(B) = 2/10 \ = 0{,}2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

Ejemplo 2: En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, se extrae una al azar. Si *A* = *"Sacar un nº menor que 5"* y *B* = *"Sacar un nº par"*, siendo *A* y *B* compatibles:



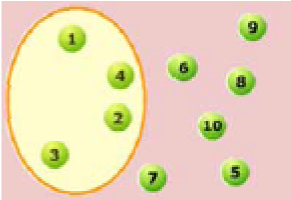
$P(A) = 4/10 \ = 0{,}4$

$P(B) = 5/10 \ = 0{,}5$

$P(A \cap B) = 2/10 \ = 0{,}2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$

Ejemplo 3: En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, se extrae una al azar. Si *A* = *"Sacar un nº menor que 5"*:



$P(A) = 0{,}4 \,; P(\bar{A}) = 0{,}6$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

3.4. PROBABILIDAD EXPERIMENTAL.

La **ley de Laplace** nos permite calcular la *probabilidad* de **experimentos regulares**, pero si la experiencia es **irregular** desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. Entonces es preciso recurrir a la experimentación.

La **probabilidad experimental** es la *probabilidad* asignada a un suceso mediante el cálculo de la **frecuencia relativa** del mismo, al repetir el experimento muchísimas veces.

Cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la probabilidad teórica. El número de pruebas a realizar dependerá del experimento y del número de sus posibles resultados.

Ejemplo 1: Al tirar una chincheta puede ser que caiga con la "punta hacia arriba" o con la "punta hacia abajo".

Para asignar probabilidad a estos dos sucesos no se puede aplicar la *regla de Laplace* ya que no son *equiprobables*, debemos recurrir a la experimentación.

Supongamos que se realiza el experimento muchas veces obteniendo los resultados de la tabla:

Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta hacia abajo	7	31	67	309	623

Se observa que conforme aumenta el nº de lanzamientos la frecuencia relativa del suceso "caer con la punta hacia abajo" se aproxima a 0,62, esa es la probabilidad que asignaremos, y al suceso "caer con la punta hacia arriba" le asignaremos la probabilidad 0,38.

Ejemplo 2: Un dado está cargado de forma que la probabilidad de una de sus caras es cinco veces la de las demás. ¿De qué cara se trata? ¿Cuál es su probabilidad?

Al repetir el lanzamiento muchas veces se observa que la cara cargada es la del número 6, su probabilidad es 0,5 y la del resto de las caras 0,1.

4. PROBABILIDAD DE EXPERIMENTOS COMPUESTOS.

En apartados anteriores hemos hecho el cálculo de la probabilidad de un suceso en experimentos en los cuales o bien se realizaba una sola extracción, o se lanzaba una bola o una moneda..., es decir, *experimentos simples*. Ahora trataremos el caso de experimentos como lanzar varias monedas o varias veces la misma moneda, o extraer varias cartas, o lanzar una moneda y un dado, en definitiva sucesivos experimentos simples, a los que llamaremos *compuestos*.

Un **experimento aleatorio compuesto** es aquel que está formado por varios *experimentos simples* realizados de forma simultánea o consecutiva y los sucesos posibles son *sucesos compuestos*.

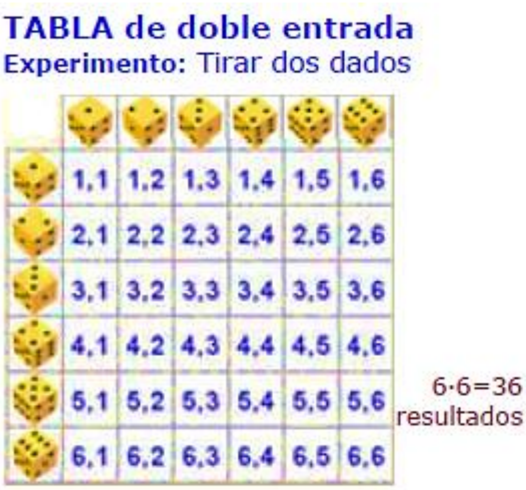
La *probabilidad* de un suceso en un *experimento compuesto* se calcula a partir de las probabilidades de los *experimentos simples* que lo forman y es igual al producto de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

4.1. TÉCNICAS DE RECUENTO.

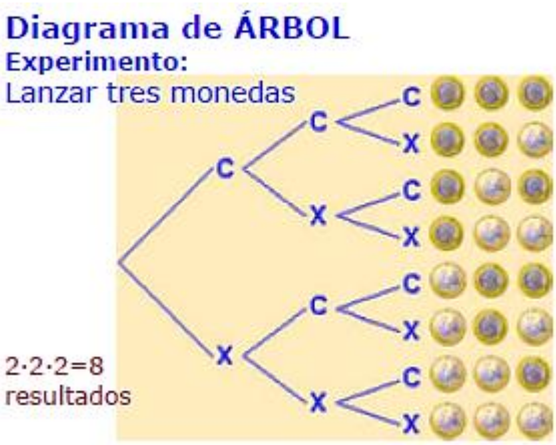
Para obtener el espacio muestral (o la probabilidad de algún suceso) de un *experimento compuesto* conviene, en muchas ocasiones, hacerse un *diagrama de árbol* o *una tabla de contingencia* que represente todas las opciones posibles. Es decir:

- Construir una **tabla de doble entrada o de contingencia**, si se combinan dos experimentos simples.
- Hacer un **diagrama de árbol**, más útil si se combinan dos o más experimentos simples. Cada resultado posible viene dado por un *camino* del diagrama.

  Ejemplos: Tirar dos dados y lanzar tres monedas.



	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

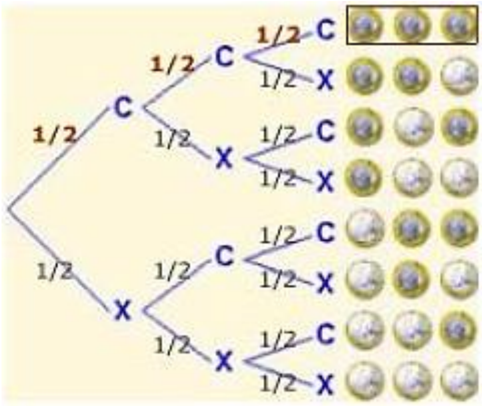


Observa que si el primer experimento tiene **m** resultados distintos y el segundo **n**, el número de resultados para la combinación de ambos experimentos es **m·n**.

La probabilidad de un "camino" en un *diagrama de árbol*, es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino. La suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Ejemplo: El experimento de lanzar tres monedas puede considerarse *compuesto* del experimento *simple* de lanzar una moneda tres veces seguidas.

Podemos construir el espacio muestral mediante un diagrama de árbol. Así, si el símbolo *X* representa cruz y *C* representa cara, el espacio muestral consta de 8 elementos:



E = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}

Así la probabilidad de obtener tres caras es:

$$P(CCC) = 1/8.$$

Se llega al mismo resultado si se multiplica la probabilidad de obtener cara en cada uno de los tres lanzamientos:

$$P(CCC) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8.$$

4.2. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las otras.

Cuando diversas experiencias aleatorias son *independientes*, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, S_3 en la tercera… es el producto de las probabilidades.

$$\boldsymbol{P(S_1 \ y \ S_2 \ y \ S_3 \dots) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) \dots}$$

Dos sucesos *A* y *B* son **independientes** cuando si ocurre uno no influye en que ocurra el otro, es decir, se cumple: $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Ejemplo 1: En el experimento “lanzar dos dados”, calcular la probabilidad del suceso “*sacar un 5 en el primero y un número par en el segundo*”.

El experimento “lanzar dos dados” es un experimento independiente, ya que los resultados del primer dado no dependen de los resultados del segundo.

Así, como *P(“Sacar un 5”) = 1/6* y la *P(“sacar un número par”) = 3/6 = 1/2*, entonces:

$$P(\text{"}sacar\ un\ 5\ en\ el\ primero\ y\ un\ número\ par\ en\ el\ segundo) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 2: El lanzamiento de monedas, es un caso de *sucesos independientes*, ya que la probabilidad de que salga cara (o cruz) es 1/2 en cada caso, no depende del resultado obtenido en la moneda anterior.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

Dos sucesos *A* y *B* son **dependientes** cuando el resultado de uno de ellos influye o condiciona el resultado del otro

Probabilidad condicionada

Cuando tenemos un *experimento compuesto* puede ocurrir que uno de los sucesos dependa del anterior, a eso lo llamamos **probabilidad condicionada**, esto es, un suceso condiciona al otro y por tanto, el resultado final.

Dado un experimento aleatorio, se llama **probabilidad de un suceso B condicionada a un suceso A**, y se escribe ***P(B|A)***, a la probabilidad de que se verifique *B* sabiendo que ha ocurrido *A*.

Fórmula de la *probabilidad condicionada*:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Si dos sucesos *A* y *B* corresponden a *experiencias aleatorias dependientes*, la probabilidad de que pase *A* en la primera y *B* en la segunda es:

$$P(A\ y\ B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Cuando dos sucesos *A* y *B* son *independientes* la *P(A|B) = P(A)* y la *P(B|A) = P(B)*. Por tanto, se cumple:

$$P(A\ y\ B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Ejemplo 1</u>: A una reunión asisten 20 personas, de las que 11 son hombres y 9 mujeres. Si 5 hombres y 3 mujeres llevan gafas, y escogemos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea una mujer y lleve gafas.

b) Sea una mujer sabiendo que lleva gafas.

	Con gafas	Sin gafas	
Hombres	5	6	11
Mujeres	3	6	9
	8	12	20

Para facilitar el cálculo se han dispuesto los datos en una *tabla de doble entrada*, llamada de **tabla contingencia**.

a) De las 20 personas 3 son mujeres con gafas, luego la probabilidad de que la persona elegida sea una mujer con gafas es: $P(M \cap G) = 3/20 = 0{,}15$.

b) En este caso el suceso "ser mujer" está condicionado por el suceso "llevar gafas", elegimos una persona de entre las que llevan gafas. De las 8 que hay, 3 son mujeres, por tanto la probabilidad es: $P(M|G) = 3/8 = 0{,}375$.

Al mismo resultado se llega efectuando el cociente: $P(M \cap G)/P(G) = (3/20)/(8/20) = 3/8$.

Para el grupo de personas que asisten a la reunión, hombres y mujeres, con gafas y sin gafas, los sucesos "ser mujer" y "llevar gafas" son *dependientes*. Has visto que la probabilidad de elegir una mujer sabiendo que lleva gafas no es la misma que la probabilidad de elegir una mujer.

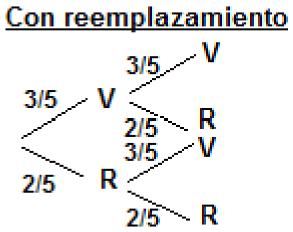
<u>Ejemplo 2</u>: Si extraemos dos cartas de una baraja española de 40 cartas (sin reposición), calcula la probabilidad de que sean dos ases.

Teniendo en cuenta que A_1 = *"Sacar un as en la primera carta"* y A_2 = *"Sacar un as en la segunda carta*", la probabilidad de "Sacar dos ases" son:

$$P(A_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \ ; \ P(A_2|A_1) = \frac{3}{39}$$

$$P(\text{"Sacar dos ases"}) = P(A_1\ y\ A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{39} = \frac{3}{390} = \frac{1}{130}$$

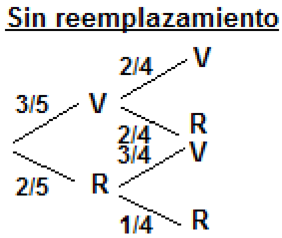
Ejemplo 3: Supongamos que tenemos una bolsa con cinco bolas (3 verdes y dos rojas). Calcular la probabilidad de extraer dos bolas verdes, con o sin reemplazamiento de la primera bola.



Con reemplazamiento: En la primera extracción, la probabilidad de sacar una bola verde es: *P(V₁) = 3/5*.

Devolvemos la bola verde a la bolsa y procedemos a la segunda extracción. Tenemos la misma situación del principio (3 bolas verdes y dos rojas), con lo que la probabilidad de sacar bola verde será la misma: $P(V_2) = 3/5$. Por tanto, la probabilidad de "sacar las dos bolas verdes", una después de la otra, devolviendo la primera bola es:

$$P(V_1\ y\ V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$



Sin reemplazamiento: En la primera extracción, la probabilidad de sacar una bola verde es: $P(V_1) = 3/5$.

En la segunda extracción ahora hay en la bolsa hay 2 bolas verdes y dos rojas), con lo que la probabilidad de sacar otra bola verde será: $P(V_2|V_1) = 2/4$.

Por tanto, la probabilidad de sacar las dos bolas verdes, una después de la otra, no devolviendo la primera bola es:

$$P(V_1\ y\ V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}3.$$

Las probabilidades varían si se hace de una u otra forma.

RESUMEN DEL TEMA 5

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS.

- **Experimento aleatorio**: es aquel que no es posible conocer previamente su resultado porque depende del azar. Ejemplos: Si lanzamos una moneda no sabemos previamente si saldrá cara o cruz. Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.
- **Experimento determinista**: es aquel que se conoce previamente su resultado.

1.1. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS.

- **Espacio muestral**: son todos los posibles resultados de un *experimento aleatorio*. Se suele designar con la letra **Ω**.
- **Suceso**: es cada uno de los posibles resultados que podemos obtener en un *experimento aleatorio*. Cada uno de estos posibles resultados se llama **suceso elemental**.

Tipos de sucesos

- Se llama **suceso elemental** aquel *suceso* que solo tiene un elemento. Ejemplo: si lanzamos un dado, un *suceso elemental* es sacar un 1: *A = {1}*; o sacar un 5: *B = {5}*.
- Se llama **supuesto compuesto** aquel que está formado por dos o más *sucesos elementales*. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso compuesto será sacar número par: *A = {2, 4, 6}*.
- El *suceso* que siempre se verifica es el **suceso seguro**. El mismo *espacio muestral* es un *suceso seguro*. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso seguro sería sacar menos de 7: *A = {1, 2, 3,4, 5, 6}*.
- El *suceso* que no puede ocurrir nunca es el **suceso imposible**. Se representa por el símbolo de conjunto vacío, **Ø**. Ejemplo: si lanzamos un dado, un suceso imposible sería sacar un 7: *A = {Ø}*.
- **Sucesos compatibles**, son aquellos que tienen algún elemento en común. Ejemplo: Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:
  - Extraer un número par: *A = {2, 4, 6}*.
  - Extraer un número menor de 4: *B = {1, 2, 3}*.
- **Sucesos incompatibles**. Son aquellos que no tienen ningún elemento en común. Ocurre cuando dos *sucesos* no pueden ocurrir a la vez. Ejemplo: al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:
  - Extraer un número par: *A = {2, 4, 6}*.
  - Extraer el 1: *B = {1}*.
- **Suceso contrario** de A, el que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos mediante $\bar{A}$. Lo forman los *sucesos elementales* que no están en *A*. Dos sucesos son *contrarios* si son *incompatibles* y entre ambos contienen a todos los elementos del *espacio muestral*.

Ejemplo: Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:

- Extraer un número par: $A = \{2, 4, 6\}$.
- Extraer un número impar: $B = \{1, 3, 5\}$.

1.2. OPERACIONES CON SUCESOS.

Unión e intersección de sucesos

Dados dos sucesos *A* y *B* de un espacio muestral *E*, llamaremos:

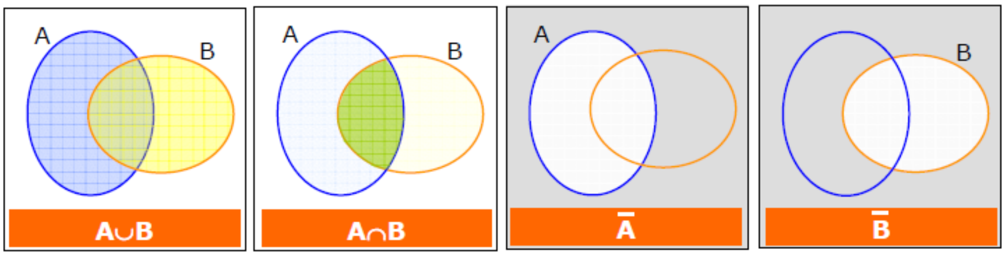
- **Suceso unión** de *A* y *B*, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, es el que ocurre cuando ocurre ***A* o *B***, alguno de los dos. Se forma juntando los sucesos elementales de *A* y de *B*.
- **Suceso intersección** de *A* y *B*, $\boldsymbol{A} \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren ***A* y *B*** a la vez. Lo forman los sucesos elementales que tienen en común *A* y *B*.

  Ejemplo: Consideremos el experimento de tirar un dado y los sucesos *A* y *B*:

  A = "salir nº impar" y *B = "salir mayor que 3"*

  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{5\}$

  Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset \rightarrow$ A y B son incompatibles.



Propiedades de las operaciones con sucesos

La *unión* e *intersección* de sucesos y el *suceso contrario* a uno dado, cumplen:

- La unión de un suceso y su contrario es el *suceso seguro*, la intersección es el *suceso imposible*. $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega}$; $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \emptyset$
- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios. $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$
- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios. $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$
- El contrario de $\bar{A}$ es *A*. $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$

2. PROBABILIDAD.

2.1. PROBABILIDAD DE UN SUCESO.

La **probabilidad de un suceso A**, indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1, y lo escribimos **P(A)**.

Si *P(A)* está próximo a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuanto más se aproxime a 1, que es la probabilidad del suceso seguro, $P(\Omega) = 1$.

La *probabilidad de un suceso* es el número hacia el que tiende la *frecuencia relativa* al repetir el experimento muchas veces.

Ejemplo: Al tirar el dado muchas veces se observa que la *frecuencia relativa* de cada una de las caras se estabiliza en torno a 1/6.

2.2. PROBABILIDAD DE SUCESOS REGULARES. REGLA DE LAPLACE.

Cuando estamos ante un experimento aleatorio en que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de salir, decimos que son **equiprobables**.

En *experimentos regulares*, cuando los sucesos elementales son *equiprobables*, la probabilidad de que suceda un suceso *A* se calcula con la **Regla de Laplace**.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{número\ de\ casos\ posibles}}$$

Un ejemplo donde podríamos aplicar esta regla sería el caso del lanzamiento de un dado, todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

2.3. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$.
- La probabilidad del *suceso seguro* es 1. $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$.
- La probabilidad del *suceso imposible* es 0. $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$.
- La probabilidad de la unión de dos *sucesos incompatibles* es: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$$

- La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto, la probabilidad del suceso contrario es: $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A).}$

2.4. PROBABILIDAD EXPERIMENTAL.

La *ley de Laplace* nos permite calcular la probabilidad de *sucesos regulares*, pero si la experiencia es *irregular* desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos.

La **probabilidad experimental** es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la **frecuencia relativa** del mismo, al repetir el experimento muchas veces.

Cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la probabilidad teórica.

La *frecuencia absoluta* de un suceso es el número de veces que se cumple cuando se repite un experimento aleatorio, y la *frecuencia relativa* es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces que se repite el experimento aleatorio.

3. EXPERIMENTOS COMPUESTOS.

Un **experimento compuesto** es aquel que está formado por varios *experimentos simples* realizados de forma simultánea o consecutiva y los sucesos posibles son sucesos compuestos.

Unos ejemplos de *experimentos compuestos* serian lanzar varias monedas o varias veces la misma moneda, o extraer varias cartas, o lanzar una moneda y un dado, en definitiva sucesivos experimentos simples, a los que llamaremos compuestos.

La *probabilidad* de un suceso en un *experimento compuesto* es el producto de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

3.1. TÉCNICAS DE RECUENTO.

Para obtener el espacio muestral (o la probabilidad de algún suceso) de un experimento compuesto conviene hacer, en muchas ocasiones, un *diagrama de árbol* o una *tabla de contingencia* que represente todas las opciones posibles. Es decir:

- Construir una **tabla de doble entrada o de contingencia**, si se combinan dos experimentos simples.
- Hacer un **diagrama de árbol**, más útil si se combinan dos o más experimentos simples. Cada resultado viene dado por un "camino" del diagrama.

Ejemplos: Tirar dos dados y lanzar tres monedas.

El primer experimento tiene **m** resultados distintos y el segundo **n**. El número de resultados para la combinación de ambos experimentos es **m·n**.

La probabilidad de un *camino* en un diagrama de árbol, es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

La suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

3.2. SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las otras.

Cuando diversas experiencias aleatorias son *independientes*, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, S_3 en la tercera… es el producto de las posibilidades.

$$P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3\ldots) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) \ldots$$

Dos sucesos *A* y *B* son *independientes* cuando si ocurre uno no influye en que ocurra el otro. En caso contrario decimos que son *dependientes*.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

Probabilidad condicionada

Cuando tenemos un *experimento compuesto* puede ocurrir que uno de los sucesos dependa del anterior, a eso lo llamamos **probabilidad condicionada**, esto es, un suceso condiciona al otro y por tanto, el resultado final.

Dado un experimento aleatorio, se llama **probabilidad de un suceso B condicionada a un suceso A**, y se escribe ***P(B/A)***, a la probabilidad de que se verifique *B* sabiendo que ha ocurrido *A*.

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Si dos sucesos *A* y *B* corresponden a *experiencias aleatorias dependientes*, la probabilidad de que pase *A* en la primera y *B* en la segunda es:

$$\boldsymbol{P(A\ y\ B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Cuando dos sucesos *A* y *B* son *independientes* la *P(A/B) = P(A)* y la *P(B/A) = P(B)*. Por tanto, se cumple:

$$\boldsymbol{P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)}$$

<u>ACTIVIDADES DEL TEMA 5</u>: "PROBABILIDAD".

1. **En el experimento lanzar un dado hemos obtenido como resultado un 3. Indica cuáles de los siguientes sucesos se han realizado:**

   a) "Salir un número impar".

   b) A = {2,3}.

   c) "Salir un número mayor que 4".

2. **En un experimento aleatorio utilizaremos una baraja española, es decir, una baraja de 40 cartas. Calcular:**

   a) Espacio muestral, si solo saco una carta.

   b) Ejemplo de un suceso elemental.

   c) Ejemplo de un suceso compuesto.

   d) Ejemplo de dos sucesos A y B, donde A y B sean compatibles.

   e) Ejemplo de dos sucesos A y B, donde A y B sean incompatibles.

   f) Si el suceso A = {salir un as}, da un ejemplo de suceso contrario al A.

   g) Ejemplo de suceso seguro.

   h) Ejemplo de suceso imposible.

3. **De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:**

   a) A = "Salir una figura", B = "Salir un oro".

   b) A = "Salir el as de bastos", B = "Salir el as de copas".

   c) A = "Salir una copa", B = "Salir el siete de copas".

4. **En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a:**
   A = "Sacar un número par menor que 5"; B = {1, 2, 6}; C = {3}.

5. **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Escribe un resultado posible sabiendo que se verifica el suceso:**

   a) "Salir 3 de bastos" U "Salir caballo" U "Salir as".

   b) "Salir copa" U "Salir el tres de oros".

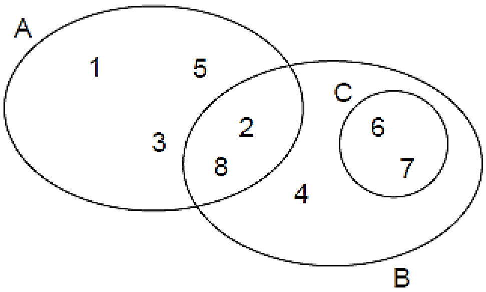
6. **Dados los conjuntos A= {a, b, c, d, e} y B = {a, c, e, f, g, h}, representa $A \cup B$ y $A \cap B$ usando un diagrama de Venn.**

7. **Dada la imagen siguiente, calcula: (2.1. → B)**

   a) A ∩ B.

   b) A ∩ C.

   c) B ∩ C.



8. **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Escribe un resultado posible sabiendo que se verifica el suceso:**

a) “Salir bastos” ∩ “Salir caballo”.

b) “Salir copa” ∩ (“Salir el tres de oros” ∪ “Salir un cinco”).

9. En una baraja española de 40 cartas, sean los sucesos A = “Salir una figura”, B = “Salir un oro” y C = “Salir un As”. Sabemos que P(A) = 0,3, que P(B) = 0,25, P(C) = 0,1, P(A∩B) = 0,075, P(A∩C) = 0 y P(B∩C)= 0,025. Si extraemos una carta, calcula:

a) $P(A \cup C)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(B \cup C)$.

10. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, determinar la probabilidad de los sucesos A = “Salir una figura de copas”, B = “Salir un tres” y C = “Salir una sota”.

11. Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 o un 6 al lanzar un dado.

12. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, dados los sucesos A = “Salir una figura”, B = “Salir un tres” y C = “Salir la sota de oros”. Calcula:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(A \cup C)$.

13. En una urna hay tres bolas rojas, dos verdes y cinco blancas. Se saca una bola anotando el color de la bola extraída. Determina la probabilidad de los sucesos: “Salir roja”, “Salir verde” y “Salir blanca”.

14. En una empresa trabajan 80 personas, de las que 20 son hombres y el resto mujeres. El 10% de los hombres y el 60% de las mujeres tiene menos de 40 años. Elegida una persona al azar calcula la probabilidad de que tenga 40 años o más.

15. En una urna hay 2 bolas blancas y 3 negras. Escribe el espacio muestral asociado a los experimentos:

a) “Extraer una bola”.

b) “Extraer dos bolas”.

16. En una urna hay dos bolas blancas y tres negras, se realizan dos extracciones, dado el suceso A = {(B,B),(B,N)} indica si en cada una de las siguientes situaciones ocurre A o su contrario.

a) Sale una bola blanca y después una negra.

b) Salen dos bolas negras.

17. En el experimento sacar dos cartas de una baraja española de 40 cartas, escribe dos posibles resultados para que ocurran los sucesos siguientes: (2.1. → B)

a) “Salir dos figuras”.

b) “Salir un oro y un basto”.

c) “Salir una figura y un oro”.

18. Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

a) El espacio muestral.

b) El suceso A = “Extraer tres bolas del mismo color”.

c) El suceso B = “Extraer al menos una bola blanca”.

d) El suceso C = “Extraer una sola bola negra”.

19. Tenemos dos cajas, una con tres bolas de colores, rojo, amarillo y azul y en la segunda caja dos bolas numeradas del 1 al 2. Si cojo una bola de cada caja, calcular la probabilidad de obtener bola roja y 2.

20. En una urna hay tres bolas rojas y dos azules, si extraemos dos bolas, calcula la probabilidad de cada uno de los posibles resultados, según se devuelva la primera bola a la urna antes de sacar la segunda, o no.

21. Tengo en un cajón 14 calcetines blancos y 8 negros. Esta mañana he sacado dos calcetines al azar, ¿cuál es la probabilidad de que fuesen los dos blancos?

22. En el experimento de extraer dos cartas de una baraja española, si la extracción se realiza sin devolución, ¿cuál es la probabilidad que la primera sea oros y la segunda copas? ¿Y si se realiza el experimento con devolución?

SOLUCIONES

1. **Soluciones**:

   a) *Si*; b) *Si*; c) *No*.

2. **Soluciones**:

   a) Ω = *{las 40 cartas de la baraja}*.

   b) *Suceso elemental = {siete de oros}*.

   c) *Suceso compuesto = "Salir figura"*.

   d) *Suceso A = "Salir figura"* y *Suceso B = "Salir sota de oros"*.

   e) *Suceso A = "Salir una carta de oros"* y *Suceso B = "Salir una carta de copas"*.

   f) *Suceso* $\bar{A}$ = *{cualquier carta menos los cuatro ases}*

   g) *Suceso seguro = {sacar cualquier carta}*.

   h) *Suceso imposible = Ø = {sacar un tres de diamantes}*.

3. **Soluciones**:

   a) *Si*; b) *No*; c) *Si*.

4. **Soluciones**:

   $\bar{A} = \{1,3,5,6\}$; $\bar{B} = \{1,3,5,6\}$; $\bar{C} = \{1,2,4,5,6\}$.

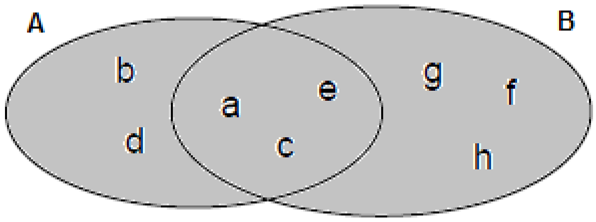
5. **Soluciones**:

   a) Hay más de un resultado posible. Por ejemplo: *As de oros*; Caballo de oros; 3 de bastos.

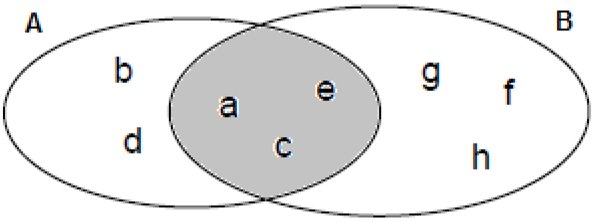
   b) Hay más de un resultado posible. Por ejemplo: *Caballo de copas*; 7 de copas; 3 de oros.

6. **Solución**:

   $\boldsymbol{A \cup B}$



   $\boldsymbol{A \cap B}$



7. **Soluciones**:

   a) *{2,8}*.

   b) *Ø*.

   c) *{6,7}*.

8. **Soluciones**: a) Por ejemplo: *Caballo de bastos*; b) Único resultado: *Cinco de copas*.

9. **Soluciones**:

   a) Los sucesos *A* y *C* son incompatibles $\rightarrow P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

b) Los sucesos *A* y *B* son compatibles → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}25 - 0{,}075 = 0{,}475$.

c) Los sucesos *B* y *C* son compatibles → $P(B \cup C) = P(C) + P(B) - P(C \cap B) = 0{,}25 + 0{,}1 - 0{,}025 = 0{,}325$.

10. Soluciones: *P(A) = 3/40 = 0,075*; *P(B) = 4/40 = 0,1*; *P(C) = 4/40 = 0,1*.

11. Soluciones:

A = "Múltiplo de 2" = {2, 4, 6}; B = "Sacar un 6" = {6}; A y B compatibles.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

12. Soluciones:

a) A y B incompatibles → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = 0{,}4$

b) A y C compatibles → $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{12}{40} + \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = 0{,}3$

13. Soluciones:

- *P("Salir roja") = 3/10*.
- *P("Salir verde") = 2/10 = 1/5*.
- *P("Salir blanca") = 5/10 = 1/2*.

14. Solución:

Empecemos por construirnos una tabla de contingencia que agrupe todos los datos dados.

	< 40 años	**≥ 40 años**	**TOTAL**
HOMBRES	2	18	20
MUJERES	36	24	60
TOTAL	38	42	80

Por tanto, la probabilidad de elegir a una persona que tenga 40 años o más es:

P(S) = 42/80 = 21/40 = 0,525.

15. Soluciones:

Si llamamos B = Sale blanca y N = Sale negra, será:

a) Ω = *{B,N}*.

b) Ω = *{(B,B),(B,N),(N,B),(N,N)}*.

16. Soluciones:

a) Ocurre *A*; b) Ocurre *el contrario de A* ($\bar{A}$).

17. Soluciones:

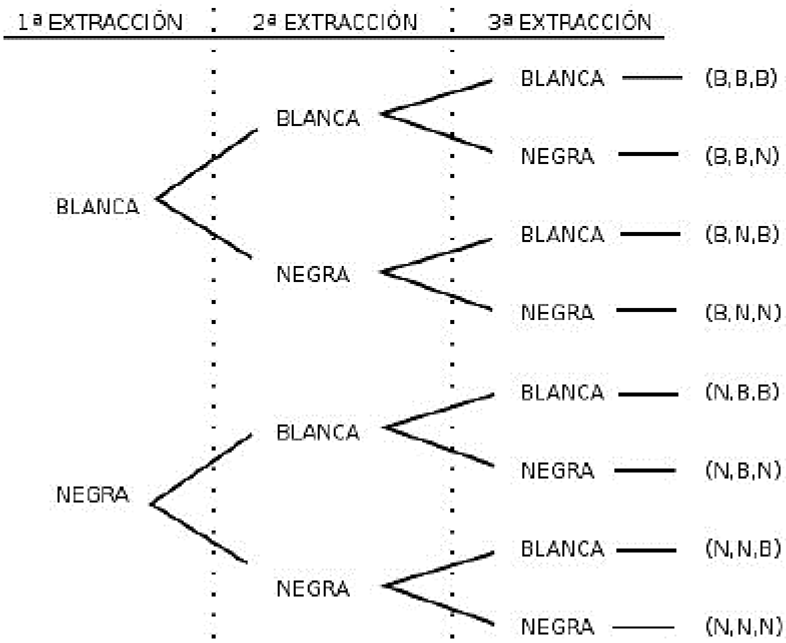
a) Sacar *la sota de espadas* y *el caballo de bastos*.
Sacar *el rey de oros* y *el rey de bastos*.

b) Sacar *el as de oros* y *el as de bastos*.
Sacar *el siete de oros* y *la sota de bastos*.

c) Sacar *el caballo de espadas* y *el as de oros*.
Sacar *la sota de copas* y *el tres de oros*.

18. Soluciones:

a) El *espacio muestral* podemos obtenerlo utilizando un diagrama de árbol.



Ω = {(b,b,b);(b,b,n);(b,n,b);(b,n,n);(n,b,b);(n,b,n);(n,n,b);(n,n,n)}.

b) *A = {(b,b,b); (n,n,n)}*.

c) *B = {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b)}*.

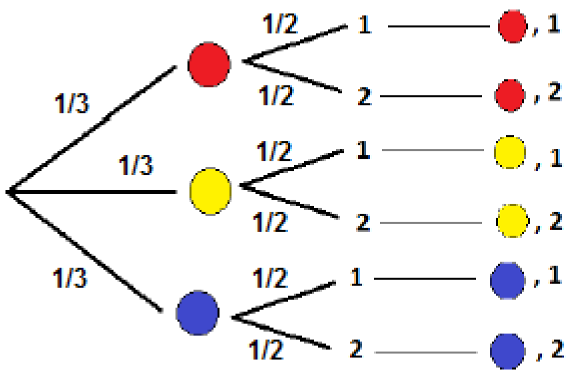
d) *C = {(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)}*.

19. Solución:

El *suceso A = "Sacar bola roja"* y el *suceso B = "Sacar un 2"*. Como *A* y *B* son *sucesos independientes*, la probabilidad de que se cumpla uno y otro será:

$$P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

A este mismo resultado hubiéramos llegado calculando la probabilidad del *experimento compuesto*. Para ello deberíamos de realizar antes el diagrama de árbol correspondiente.



$$P(Roja\ y\ 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Al ser *experimentos regulares*, se podría haber utilizado la *Regla de Laplace*.

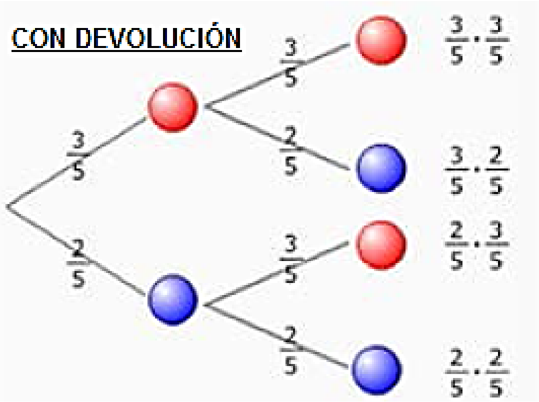
$$P(S) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ faborables}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{1}{6}$$

20. Soluciones:

Si extraemos dos bolas, atendiendo al color hay cuatro posibles resultados: *RR*, *RA*, *AR* y *AA*. Las probabilidades no serán las mismas si devolvemos la primera bola a la urna o no. En ambos casos se trata de *experimentos compuestos*, donde la probabilidad de un suceso es el producto de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

Con devolución

En este caso los sucesos *A* = *{sacar primera bola}* y *B* = *{sacar segunda bola}* serán *independientes* el uno del otro.



$$P(R_1\ y\ R_2) = P(R_1)\cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = P(R_1)\cdot P\left(R_2\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

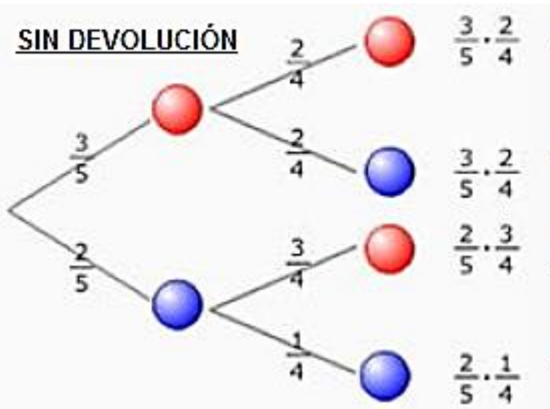
$$P(R_1\ y\ A_2) = P(R_1)\cdot P\left({}^{A_2}/_{R_1}\right) = P(R_1)\cdot P\left(A_2\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$$

$$P(A_1\ y\ R_2) = P(A_1)\cdot P\left({}^{R_2}/_{A_1}\right) = P(A_1)\cdot P\left(R_2\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$$P(A_1\ y\ A_2) = P(A_1)\cdot P\left({}^{A_2}/_{A_1}\right) = P(A_1)\cdot P\left(A_2\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$$

<u>Sin devolución</u>

En este caso los sucesos A = {sacar primera bola} y B = {sacar segunda bola} serán dependientes el uno del otro. No nos quedan el mismo número de bolas después de extraer la primera bola.



$$P(R_1\ y\ R_2) = P(R_1)\cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$$

$$P(R_1\ y\ A_2) = P(R_1)\cdot P\left({}^{A_2}/_{R_1}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$$

$$P(A_1\ y\ R_2) = P(A_1)\cdot P\left({}^{R_2}/_{A_1}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$

$$P(A_1\ y\ A_2) = P(A_1)\cdot P\left({}^{A_2}/_{A_1}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

21. Solución:

La probabilidad de sacar dos calcetines blancos será:

$$P(B_1\ y\ B_2) = P(B_1)\cdot P(B_2/B_1) = \frac{14}{22}\cdot\frac{13}{21} = \frac{182}{462} = \frac{91}{231} = 0{,}39$$

22. Solución:

La probabilidad de sacar dos cartas y que la primera sea oros (suceso A) y la segunda copas (suceso B), sin reemplazamiento es:

$$P(A\ y\ B) = P(A)\cdot P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39} = \frac{100}{1560} = \frac{5}{78} = 0{,}0641$$

Con reemplazamiento es:

$$P(A\ y\ B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{100}{1600} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 12: TRIGONOMETRÍA. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR.

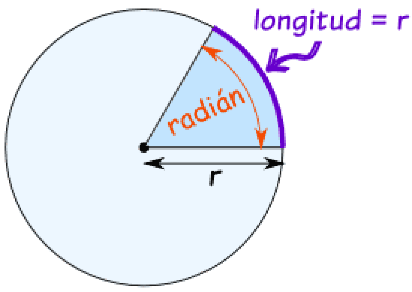
TEMA 6. TRIGONOMETRÍA.

1. MEDIDA DE ÁNGULOS.

Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice**.

El *ángulo* es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario. Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

- **Grado sexagesimal (°)**: Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un *grado sexagesimal (1°)*. Un *grado* tiene *60 minutos (')* y un *minuto* tiene *60 segundos ('')*.
- **Radián (rad)**: Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

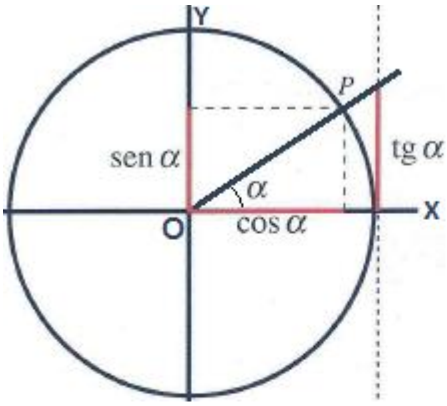


Si trazamos una circunferencia de radio 1 unidad, es fácil establecer una relación entre ángulos expresados en *grados sexagesimales* y ángulos expresados en *radianes*.

2π rad = 360º ; π rad = 180º ; π/2 rad = 90º …

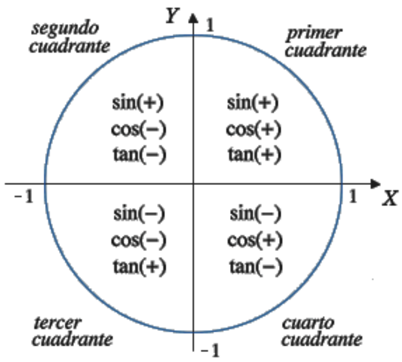
El resto de equivalencias las podemos hallar mediante una simple regla de tres.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.



Para entender las *razones trigonométricas*, partiremos de una *circunferencia goniométrica* o *trigonométrica*, que es una circunferencia de radio 1 unidad, que representaremos sobre unos ejes de coordenadas XY. Sobre ella, podemos trazar ángulos que al proyectarlos sobre los ejes, formarán un triángulo rectángulo.

El **seno** del ángulo**, sen α**, será la proyección del ángulo sobre el eje Y, el **coseno** del ángulo, **cos α**, será la proyección sobre el eje X, y la **tangente** del ángulo, **tg α**, será la longitud del segmento de la recta vertical x = 1, comprendida entre los lados del ángulo.

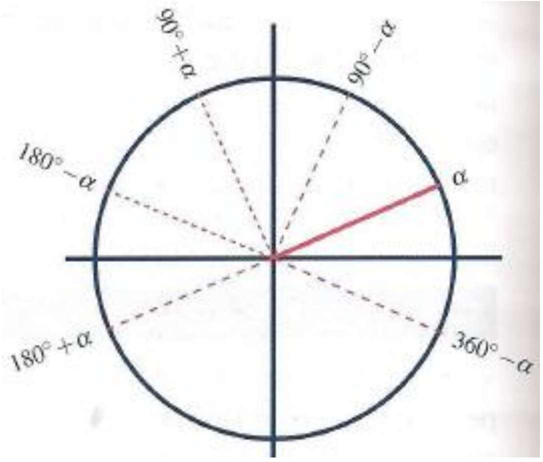


Las coordenadas del punto *P*, serán por tanto (*cos α*, *sen α*). Cuando el ángulo α varía, el punto *P* girará sobre la circunferencia. Como el radio de la circunferencia es 1, sus coordenadas (coseno y seno) variarán entre – 1 y +1. Es decir, tanto el *seno* como el *coseno* de cualquier ángulo estarán en el intervalo [-1,1]. La tangente se hace infinitamente grande cuando α se aproxima a un ángulo recto, con signo positivo si $\alpha \cong 90º$ y negativo si $\alpha \cong 270º$.

Las **razones trigonométricas del ángulo** α están relacionadas por dos relaciones evidentes:

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}\ ;\ (\cos\alpha)^2 + (sen\ \propto)^2 = 1}$$

La primera relación se obtiene de la propia definición de tangente y la segunda se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo formado el segmento $\overline{OP}$ y sus proyecciones sobre los ejes (la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado).

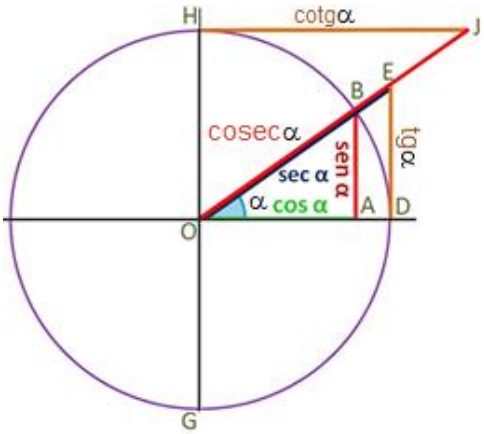


$$\overline{OP}^2 = cos^2 \propto + sen^2 \propto = 1$$

Por razones de simetría, las razones trigonométricas de diversos ángulos, están relacionadas entre sí, como puede verse en la figura.

Las *razones trigonométricas* se aplican en la resolución de problemas con triángulos.

2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.

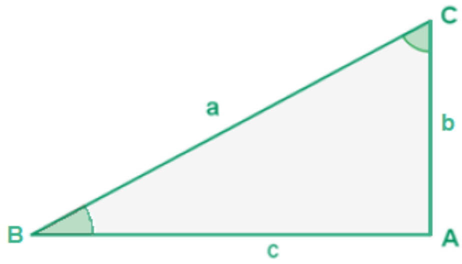


- **Seno del ángulo B**: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$\boldsymbol{sen\ B = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}}$$

- **Coseno del ángulo B**: es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa.

$$\boldsymbol{cos\ B = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a}}$$



- **Tangente del ángulo B**: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo.

$$\boldsymbol{tg\ B = \frac{sen\ B}{\cos B} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{b}{c}}$$

- **Cosecante del ángulo B**: es la razón inversa del seno de B.

$$\boldsymbol{cosec\ B = \frac{1}{sen\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}}$$

- **Secante del ángulo B**: es la razón inversa del coseno de B.

$$\boldsymbol{\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{c}}$$

- **Cotangente del ángulo B**: es la razón inversa de la tangente de B.

$$\boldsymbol{cotg\ B = \frac{1}{tg\ B} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}}$$

Las calculadoras científicas tienen teclas para facilitar el cálculo del *seno (sin)*, *coseno (cos)* y la *tangente (tan)* del ángulo introducido, en grados o en radianes. También permiten calcular mediante una combinación de teclas el *arc sen x, arc cos x* y el *arc tg x*.

2.2. IDENTIDADES NOTABLES TRIGONOMÉTRICAS.

La fórmula fundamental de la trigonometría es: $\boldsymbol{sen^2} \propto +\boldsymbol{cos^2} \propto = \mathbf{1}$.

De aquí se derivan otras dos propiedades importantes:

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula anterior por el cuadrado del coseno, obtenemos:

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto} \rightarrow \boldsymbol{tg^2} \propto +\mathbf{1} = \boldsymbol{sec^2} \propto$$

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula fundamental por el cuadrado del seno, obtenemos:

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto} \rightarrow \mathbf{1} + \boldsymbol{cotg^2} \propto = \boldsymbol{cosec^2} \propto$$

<u>Ejemplo 1</u>:

Sabiendo que *sen* α *= 3/5*, y que *90º <*α *< 180°*, calcular las restantes razones trigonométricas del *ángulo* α.

$$sen \propto = \frac{3}{5} \rightarrow \boldsymbol{cosec\ \alpha} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}; \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \rightarrow \boldsymbol{sec} \propto = \ -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$$

$$\boldsymbol{tg} \propto = \frac{sen \propto}{\cos \propto} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \rightarrow \boldsymbol{cotg\ \alpha} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Nota: el coseno es negativo al estar el ángulo en el segundo cuadrante.

<u>Ejemplo 2</u>:

Sabiendo que *tg* α *= 2*, y que *180º <* α *< 270°*, calcular las restantes razones trigonométricas del *ángulo* α.

$$tg\ \propto = 2 \rightarrow cotg \propto = \frac{1}{2};\ \sec\alpha = \ -\sqrt{1+(2)^2} = -\sqrt{5} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$sen \propto = tg \propto \cdot \cos \propto = -2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow cosec\ \alpha = \ -\frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Nota: El coseno es negativo al estar el ángulo en el tercer cuadrante.

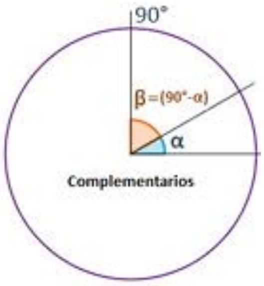
2.3. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DIFERENTES ÁNGULOS.

- **<u>Entre ángulos complementarios</u>**: Son aquéllos cuya suma es 90º o $\pi/2$ radianes.

  sen (90º - α) = cos α.

  cos (90º - α) = sen α.

  tg (90º - α) = cotg α.

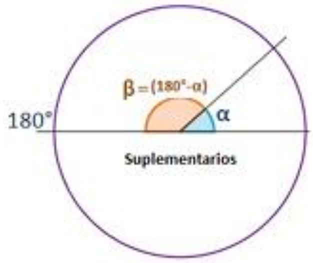


- **<u>Entre ángulos suplementarios</u>**: Son aquéllos cuya suma es 180° o π radianes.

  sen (180º - α) = sen α.

  cos (180º - α) = - cos α.

  tg (180º - α) = - tg α.

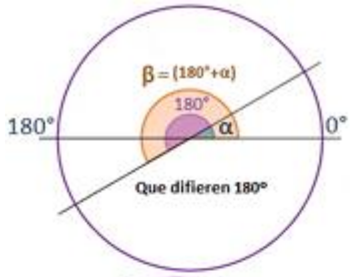


- **<u>Entre ángulos que se diferencian en 180</u>**: Son aquéllos cuya resta es 180° o π radianes.

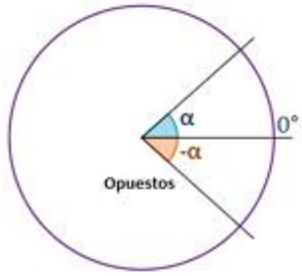
  sen (180º + α) = - sen α.

  cos (180º + α) = - cos α.

  tg (180º + α) = tg α.



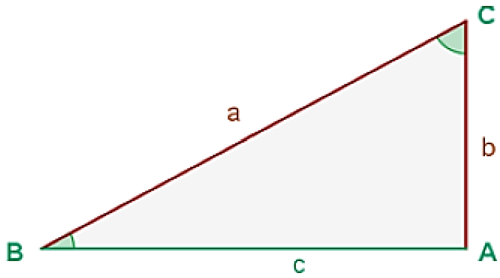
- **<u>Entre ángulos opuestos</u>**: Son aquéllos cuya suma es 360º o 2π radianes.
- sen (- α) = - sen α.
- cos (- α) = cos α.
- tg (- α) = tg α.



3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un triángulo es hallar sus lados y ángulos. Para ello es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

<u>Caso 1. Se conocen la hipotenusa y un cateto.</u>



$b = a \cdot \cos C \to \cos C = \frac{b}{a} \to C = arc\cos\frac{b}{a}$

$c = a \cdot sen\ C\,; B = 90 - C$

<u>Ejemplo</u>: Resolver el triángulo conociendo *a = 415 m* y *b = 280 m*.

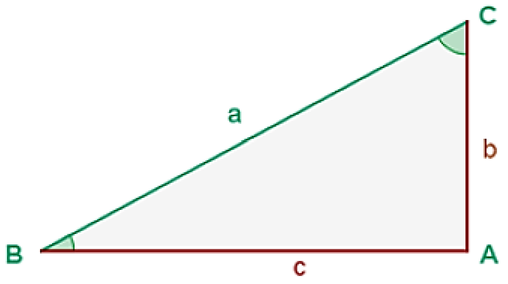
$280 = 415 \cdot \cos C \to \boldsymbol{C} = arc\cos\frac{280}{415} = \mathbf{47{,}57°}$

$\boldsymbol{B} = 90 - 47{,}57 = \mathbf{42{,}43°}\,; \boldsymbol{c} = 415 \cdot sen\ 47{,}57° = \mathbf{306{,}31}\ \boldsymbol{m}$

Caso 2. Se conocen los dos catetos.

$a = \sqrt{b^2 + c^2}\ ;\ b = a \cdot cos\ C \rightarrow cos\ C = \dfrac{b}{a} \rightarrow C = arc\ cos \dfrac{b}{a}$

$B = 90 - C$



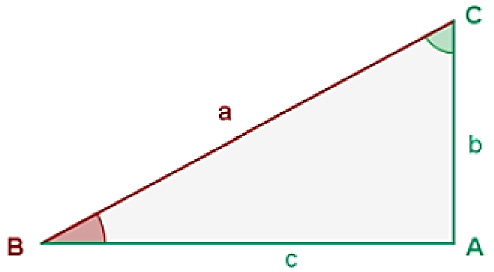
Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo *b = 33 m* y *c = 21 m*.

$\boldsymbol{a} = \sqrt{33^2 + 21^2} = \mathbf{39,11}\ \boldsymbol{m}\ ;$

$\boldsymbol{C} = arc \cos \dfrac{33}{39{,}11} = \mathbf{32,46°}\ ;\ \boldsymbol{B} = 90 - 32{,}46 = \mathbf{57,54°}$

Caso 3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo.

$c = a \cdot \cos B\ ;\ b = a \cdot sen\ B\ ;\ C = 90 - B$

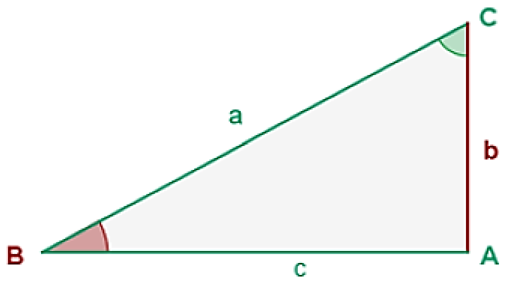


Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo *a = 45 m* y *B = 22°*.

$\boldsymbol{c} = 45 \cdot \cos 22° = \mathbf{41,72}\ \boldsymbol{m}\ ;\ \boldsymbol{b} = 45 \cdot sen\ 22° = \mathbf{16,86}\ \boldsymbol{m}\ ;\ \boldsymbol{C} = 90 - 22 = \mathbf{68°}$

Caso 4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo.

$b = a \cdot sen\ B \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ B}\ ;\ c = a \cdot \cos B\ ;\ C = 90 - B$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo *b = 5,2 m* y *B = 37º*.

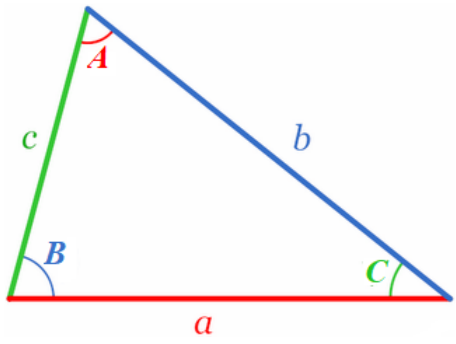
$\boldsymbol{a} = \dfrac{5{,}2}{sen\ 37°} = \mathbf{8,64}\ \boldsymbol{m}\ ;\ \boldsymbol{c} = 8{,}64 \cdot \cos 37° = \mathbf{6,9}\ \boldsymbol{m}$

$\boldsymbol{C} = 90 - 37 = \mathbf{53°}$

4. TEOREMA DEL SENO.

El **teorema de los senos** dice que **"cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto"**.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sen\ A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{sen\ B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{sen\ C}}$$



Ejemplo: Calcular *b* sabiendo que *a = 15 m* y *A = 45º* y *B = 35º*.

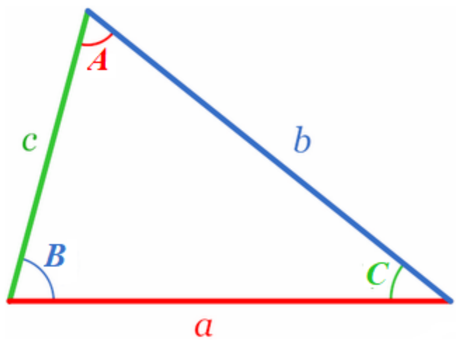
$$\frac{15}{sen\ 45°} = \frac{b}{sen\ 35°} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{15 \cdot sen\ 35°}{sen\ 45°} = \mathbf{12,17}\ \boldsymbol{m}$$

5. TEOREMA DEL COSENO.

El **teorema del coseno** dice que **"en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman"**.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



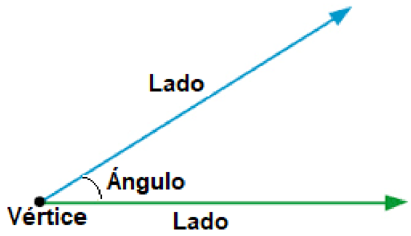
Ejemplo: Calcular *c* sabiendo que *a = 15 m*, *A = 45º*, *B = 35º* y *b = 12,17 m*.

$$C = 180 - 45 - 35 = 100°$$

$$c^2 = 15^2 + (12{,}17)^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12{,}17 \cdot \cos 100° = 436{,}51 \rightarrow \boldsymbol{c} = \sqrt{436{,}51} = \mathbf{20{,}89}\ \boldsymbol{m}$$

RESUMEN DEL TEMA 6

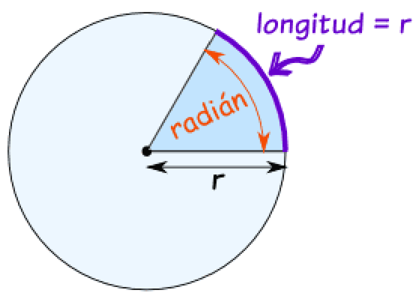
1. MEDIDA DE ÁNGULOS.



Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice**.

El *ángulo* es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario. Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

- **Grado sexagesimal (°)**: Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un *grado sexagesimal (1°)*. Un *grado* tiene *60 minutos (')* y un *minuto* tiene *60 segundos ('')*.
- **Radián (rad)**: Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

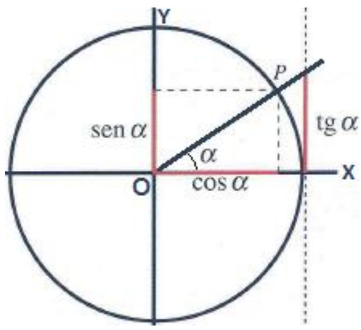


Es fácil establecer una relación entre ángulos expresados en *grados sexagesimales* y ángulos expresados en radianes.

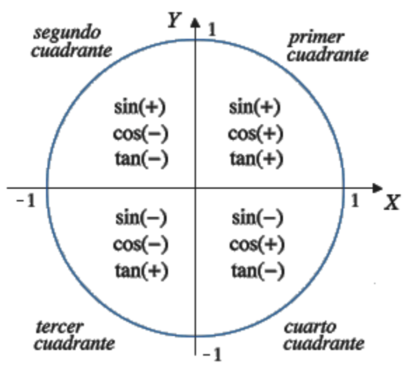
$$2\pi \text{ rad} = 360^{o} \;;\; \pi \text{ rad} = 180^{o} \;;\; \pi/2 \text{ rad} = 90^{o} \ldots$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Se llama **circunferencia goniométrica** a aquélla que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la *circunferencia goniométrica* los ejes de coordenadas XY delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.



Cualquier punto *P* que situemos sobre ella formará un *ángulo* α con el *eje X*. Las proyecciones de este *ángulo* α sobre los ejes, formarán un triángulo rectángulo. El **seno** del ángulo**, sen** $\boldsymbol{\alpha}$, será la proyección del ángulo sobre el eje Y, el **coseno** del ángulo, **cos** $\boldsymbol{\alpha}$, será la proyección sobre el eje X, y la **tangente** del ángulo, **tg** $\boldsymbol{\alpha}$, será la longitud del segmento de la recta vertical $x = 1$, comprendida entre los lados del ángulo. Por tanto, las coordenadas del punto *P*, serán (*cos* α, *sen* α).

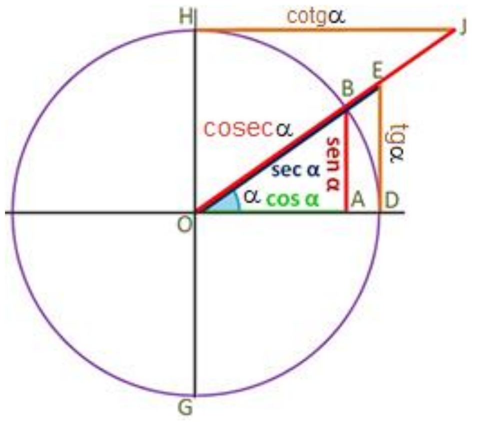


Cuando el ángulo α varía, el punto *P* girará sobre la circunferencia. Como el radio de la circunferencia es 1, sus coordenadas (*coseno* y *seno*) variarán entre – 1 y +1. Es decir, tanto el *seno* como el *coseno* de cualquier ángulo estarán en el intervalo [-1,1]. La *tangente* se hace infinitamente grande cuando α se aproxima a un ángulo recto, con signo positivo si $\alpha \cong 90^{o}$ y negativo si $\alpha \cong 270^{o}$.

Las **razones trigonométricas del ángulo** $\boldsymbol{\alpha}$ están relacionadas mediante la siguiente relación:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.



- **Seno del ángulo B**: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$\boldsymbol{sen\ B = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}}$$

- **Coseno del ángulo B**: es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa.

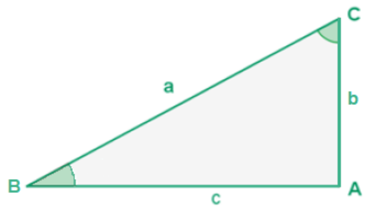
$$\boldsymbol{cos\ B = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a}}$$

- **Tangente del ángulo B**: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo.

$$\boldsymbol{tg\ B = \frac{sen\ B}{\cos B} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{b}{c}}$$

- **Cosecante del ángulo B**: es la razón inversa del seno de B.

$$\boldsymbol{cosec\ B = \frac{1}{sen\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}}$$



- **Secante del ángulo B**: es la razón inversa del coseno de B.

$$\boldsymbol{\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{c}}$$

- **Cotangente del ángulo B**: es la razón inversa de la tangente de B.

$$\boldsymbol{cotg\ B = \frac{1}{tg\ B} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}}$$

2.2. IDENTIDADES NOTABLES TRIGONOMÉTRICAS.

La fórmula fundamental de la trigonometría es: $\boldsymbol{sen^2} \propto +\boldsymbol{cos^2} \propto = \mathbf{1}$. De aquí se derivan otras dos propiedades importantes:

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula anterior por el cuadrado del coseno, obtenemos:

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto} \rightarrow \boldsymbol{tg^2} \propto +\mathbf{1} = \boldsymbol{sec^2} \propto$$

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula fundamental por el cuadrado del seno, obtenemos:

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto} \rightarrow \mathbf{1} + \boldsymbol{cotg^2} \propto = \boldsymbol{cosec^2} \propto$$

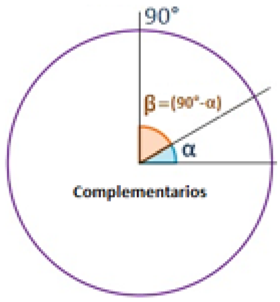
2.3. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DIFERENTES ÁNGULOS.

- **<u>Entre ángulos complementarios</u>**: Son aquéllos cuya suma es 90º o $\pi/2$ radianes.

  sen (90º - α) = cos α.

  cos (90º - α) = sen α.

  tg (90º - α) = cotg α.

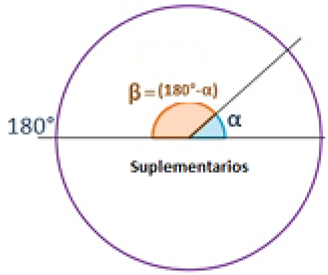


- **<u>Entre ángulos suplementarios</u>**: Son aquéllos cuya suma es 180° o π radianes.

  sen (180º - α) = sen α.

  cos (180º - α) = - cos α.

  tg (180º - α) = - tg α.

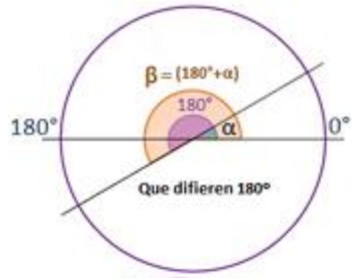


- **<u>Entre ángulos que se diferencian en 180</u>**: Son aquéllos cuya resta es 180° o π radianes.

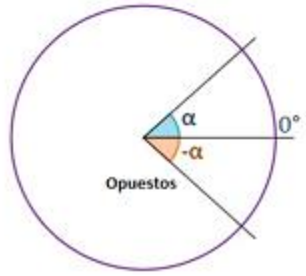
  sen (180º + α) = - sen α.

  cos (180º + α) = - cos α.

  tg (180º + α) = tg α.



- **<u>Entre ángulos opuestos</u>**: Son aquéllos cuya suma es 360º o 2π radianes.
- sen (- α) = - sen α.
- cos (- α) = cos α.
- tg (- α) = tg α.



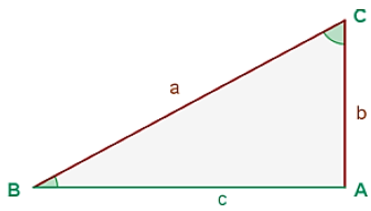
3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un *triángulo rectángulo* es hallar sus *lados* y *ángulos*. Para ello es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

<u>Caso 1. Se conocen la hipotenusa y un cateto.</u>

$$b = a \cdot \cos C \rightarrow \cos C = \frac{b}{a} \rightarrow C = arc\cos\frac{b}{a}$$

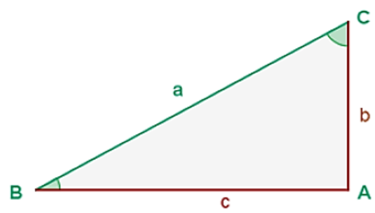
$$c = a \cdot sen\ C\ ; B = 90 - C$$



<u>Caso 2. Se conocen los dos catetos.</u>

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}\ ; b = a \cdot cos\ C \rightarrow cos\ C = \frac{b}{a} \rightarrow C = arc\ cos\frac{b}{a}$$

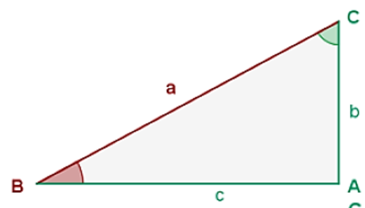
$$B = 90 - C$$



<u>Caso 3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo.</u>

$$c = a \cdot \cos B\ ; b = a \cdot sen\ B$$

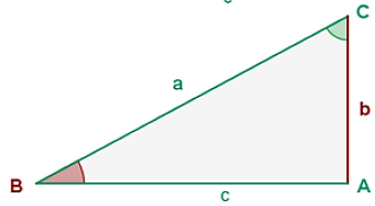
$$C = 90 - B$$



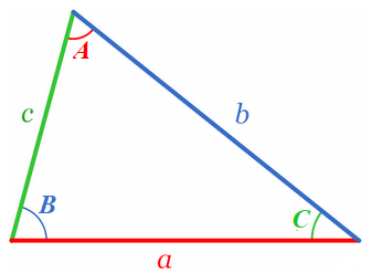
<u>Caso 4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo.</u>

$$b = a \cdot sen\ B \rightarrow a = \frac{b}{sen\ B}\ ; c = a \cdot \cos B$$

$$C = 90 - B$$



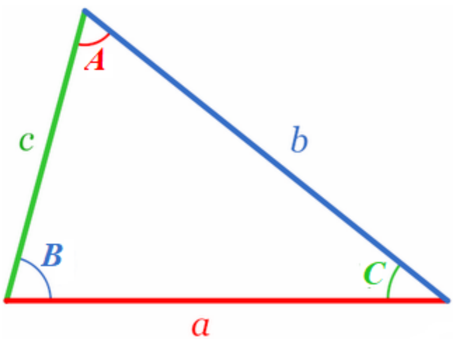
4. TEOREMA DEL SENO.



El **teorema del seno** dice que **"cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto"**.

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

5. TEOREMA DEL COSENO.



El **teorema del coseno** dice que **"en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman"**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

<u>ACTIVIDADES DEL TEMA 6</u>: “TRIGONOMETRÍA”.

1. **Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos: 3 rad, 2π/5 rad y 3π/10 rad.**

2. **Expresa en radianes los siguientes ángulos: 316°, 10° y 127º.**

3. **Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

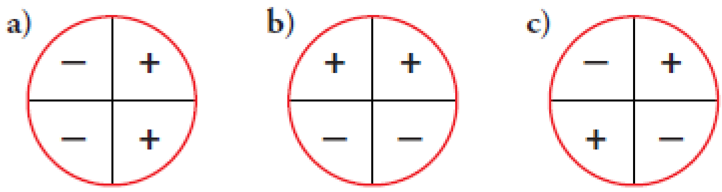
   a) 128° b) 198° c) 87°

   d) 98° e) 285° f) 305°

4. **Completa esta tabla sin usar la calculadora:**

	0°	90°	180°	270°	360°
sen		1			
cos		0			
tg		No tiene			

5. **En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿Cuál corresponde a *sen* α? ¿Cuál a *cos* α? ¿Y cuál a *tg* α?**



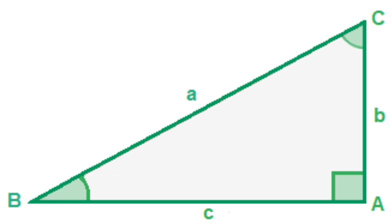
6. **Si sen α = 0,28, calcula cos α y tg α utilizando las relaciones fundamentales (α < 90°).**

7. **Halla el valor de sen α y tg α sabiendo que cos α = 2/3 (α < 90°).**

8. **Sabiendo que cos α = 1/4, y que 270º < α < 360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.**

9. **De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?**

10. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41,7°. Resolver el triángulo.**



11. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54,6°. Resolver el triángulo.**

12. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.**

13. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.**

14. **Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?**

15. **Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.**

16. **Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?**

17. **Halla la altura de una antena de radio sabiendo que a una distancia de 18 m se ve la parte superior de la antena bajo un ángulo de 30º.**

18. **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**

19. **En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.**

SOLUCIONES

1. Soluciones:

Se puede resolver estos cambios de unidades mediante una simple regla de tres:

- 2π rad $\longrightarrow$ 360º

  3 rad $\longrightarrow$ x ; x = (3 · 360)/ 2π = 171,887º.

  3 rad son 171,887º sexagesimales.

- 2π rad $\longrightarrow$ 360º

  $2\pi/5$ rad $\longrightarrow$ x ; x = (2π · 360)/ (2π ·5) = 72º.

  $2\pi/5$ rad son 72º sexagesimales.

- 2π rad $\longrightarrow$ 360º

  $3\pi/10$ rad $\longrightarrow$ x ; x = (3π · 360)/ (2π ·10) = 54º.

  $3\pi/10$ rad son 54º sexagesimales.

2. Soluciones:

El procedimiento es el mismo que el ejercicio anterior.

- 360º $\longrightarrow$ 2π rad

  316º $\longrightarrow$ x ; x = (316 ·2π)/ 360 = 5,515 rad

  316º son 5,515 rad.

- 360º $\longrightarrow$ 2π rad

  10º $\longrightarrow$ x ; x = (10 · 2π)/ 360 = 0,174 rad

  10º son 0,174 rad.

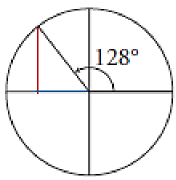
- 360º $\longrightarrow$ 2π rad

  127º $\longrightarrow$ x ; x = (127 · 2π)/ 360 = 0,174 rad

  127º son 2,216 rad.

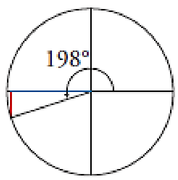
3. Soluciones:

a)



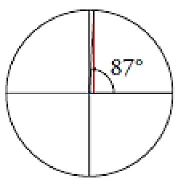
128°	
sen	+
cos	–
tg	–

b)



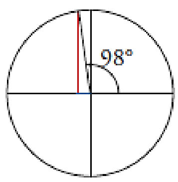
198°	
sen	–
cos	–
tg	+

c)



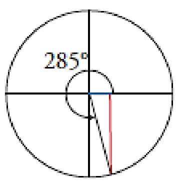
87°	
sen	+
cos	+
tg	+

d)



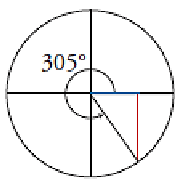
98°	
sen	+
cos	–
tg	–

e)



285°	
sen	–
cos	+
tg	–

f)



305°	
sen	–
cos	+
tg	–

4. **Soluciones:**

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	No tiene	0	No tiene	0

5. **Soluciones:**

a) ***cos*** α; b) ***sen*** α; c) ***tg*** α.

6. **Soluciones:**

Para resolver este problema utilizaremos la relación fundamental de la trigonometría:

$$\boldsymbol{sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1}.$$

Si *sen* α = *0,28*, entonces, $cos^2 \propto = 1 - sen^2 \propto = 1 - (0{,}28)^2 \rightarrow \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{1-(0{,}28)^2} = \mathbf{0,96}$.

$$\boldsymbol{tg} \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{0{,}28}{0{,}96} = \mathbf{0,292}.$$

7. **Soluciones:**

El planteamiento es el mismo que el ejercicio anterior.

Si *cos* α = *2/3*, entonces, $sen^2 \propto = 1 - cos^2 \propto = 1 - (2/3)^2 \rightarrow \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{1-(2/3)^2} = \mathbf{0,745}$.

$$\boldsymbol{tg} \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{0{,}745}{2/3} = \mathbf{1,117}.$$

8. **Soluciones:**

Para resolver este problema utilizaremos la relación fundamental de la trigonometría:

$$\boldsymbol{sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1}.$$

Si $\cos \propto = 1/4 = 0{,}25$, entonces, $\boldsymbol{sec} \propto = 1/\cos \propto = 1/0{,}25 = \mathbf{4}$. Calculemos ahora el *sen* α.

$sen^2\alpha = 1 - (0{,}25)^2 \rightarrow \boldsymbol{sen\alpha} = -\sqrt{1-(0{,}25)^2} = \mathbf{-0,968}$.

Por tanto, $\boldsymbol{cosec} \propto = 1/sen \propto = 1/{-0{,}968} = \mathbf{-1,033}$.

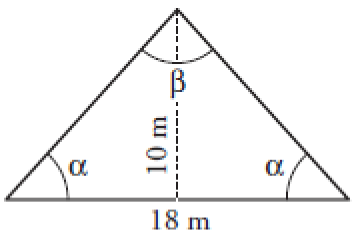
El signo negativo se debe a que α está en el cuarto cuadrante.

$$\boldsymbol{tg} \propto = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}968}{0{,}25} = \mathbf{-3,872} \rightarrow \boldsymbol{cotg\alpha} = 1/tg\alpha = 1/{-3{,}872} = \mathbf{0,258}.$$

9. **Soluciones**:

$$tg \propto = \frac{10}{9} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = arctg\frac{10}{9} = \mathbf{48,01°}$$

$$\boldsymbol{\beta} = 180 - 2 \cdot \alpha = 180 - 2 \cdot 48{,}01 = \mathbf{83,98°}$$

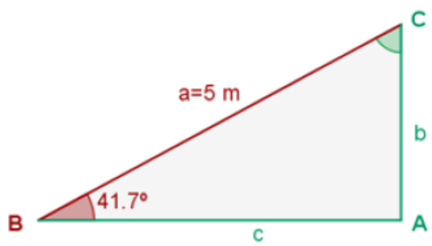


10. **Soluciones:**

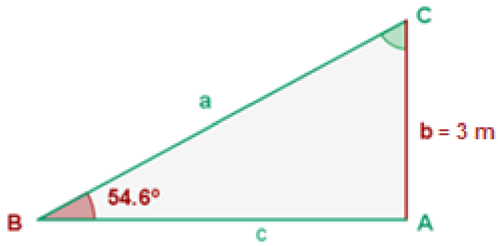
Dado que la suma de los tres ángulos de un triángulo rectángulo es *180º*, ***C*** *= 90 – 41,7 =* ***48,3º***.

b *= a · sen 41,7º = 5 · sen 41,7º =* ***3,33 m***.

c *= a · cos 41,7º = 5 · cos 41,7º =* ***3,73 m***.



11. Soluciones:

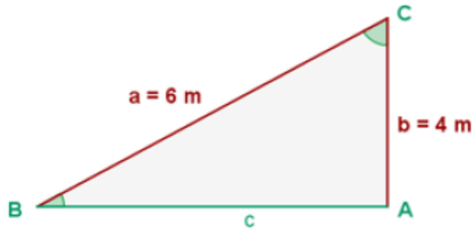


C = *90 – 54,6 =* ***35,4º****.*

b = a · sen 54,6º → ***a*** *= b / sen 54,6º =* ***3.68 m****.*

c *= a · cos 54,6º =* ***2,13 m****.*

12. Soluciones:



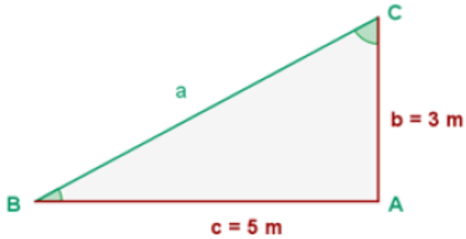
b = a · sen B → sen B = b/a = 4/6 = 0,67.

B *= arc sen 4/6 =* ***41,81º****.*

C *= 90 – 41,81 =* ***48,19º****.*

$$\boldsymbol{c} = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \mathbf{4,47}\ \boldsymbol{m}.$$

13. Soluciones:



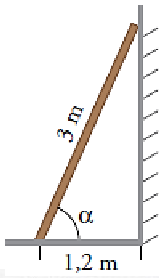
$$\boldsymbol{a} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5,83}\ \boldsymbol{m}.$$

b = a · sen B → ***B*** *= arc sen 3 / 5,83 =* ***30,97º****.*

C *= 90 – 41,81 =* ***59,03º****.*

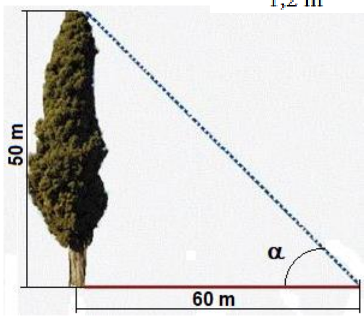
14. Solución:

$$\cos \propto = \frac{1,2}{3} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = arc\ cos\frac{1,2}{3} = \mathbf{66,42°}$$



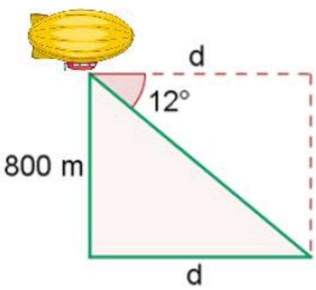
15. Solución:

$$tg \propto = \frac{50}{60} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = arc\ tg\frac{50}{60} = \mathbf{39,81°}$$



16. Solución:

$$tg\ 12° = \frac{800}{d} \rightarrow \boldsymbol{d} = \frac{800}{tg\ 12°} = \mathbf{3763,7}\ \boldsymbol{m}$$

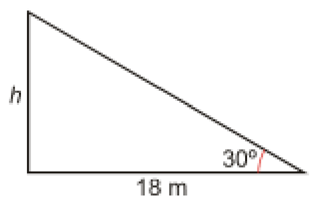


17. Solución:

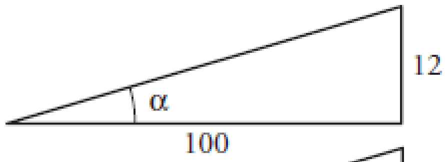
Llamemos *h* a la altura de la antena, entonces

tg 30º = h /18 → h = 18 ·tg 30º = 10,39

La altura de la antena es de **10,39 m**.



18. Soluciones:



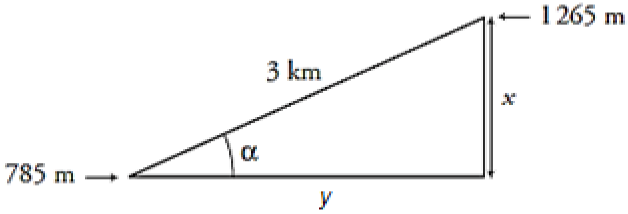
$$tg\ \alpha = \frac{12}{100} \to \boldsymbol{\alpha} = arc\ tg\,\frac{12}{100} = \mathbf{6{,}84}°.$$

$$x = 7000 \cdot sen\ \propto = 834{,}02\ m.$$

Hemos descendido ***834,02 m***.

19. Soluciones:

$$x = 1265 - 785 = 480\ m.$$



$$sen\ \alpha = \frac{480}{3000} \to \boldsymbol{\alpha} = arc\ sen\,\frac{480}{3000} = \mathbf{9{,}21}°.$$

La pendiente = *tg* α.

$\boldsymbol{tg} \propto = tg\ 9{,}21° = \ \mathbf{0{,}162} \to \mathbf{16{,}2}\%$

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 12: TRIGONOMETRÍA. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR.

TEMA 7. CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS DE INTERÉS.

1. INTRODUCCIÓN.

La **Física** es la parte de la ciencia que estudia los *fenómenos físicos*: los describe, los analiza y descubre las leyes que los rigen. Un *fenómeno físico* es el **movimiento de los cuerpos**.

La parte de la *física* que estudia el *movimiento* es la **Mecánica** y comprende dos ramas: la *Cinemática* y la *Dinámica*.

La **Cinemática** es la rama de la *Física* que estudia el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo producen (las fuerzas), limitándose al estudio de la *trayectoria* recorrida.

1.1. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.

Antes de comenzar con el estudio de los *movimientos* debemos conocer sus *magnitudes* y *unidades*. Una **magnitud física** es una propiedad que podemos observar en cualquier cuerpo y que podemos darle un valor numérico mediante un proceso de medida. Hay dos tipos de *magnitudes físicas*:

- **Magnitud escalar**: es aquella que queda definida con un número y su correspondiente unidad. Ejemplo: la masa, el volumen, la densidad, etc.
- **Magnitud vectorial**: es aquella que se representa mediante un *vector*. A su vez, éste queda definido por cuatro elementos:
  - **Módulo**: es el valor numérico de la magnitud.
  - **Dirección**: es la de la recta que contiene al vector.
  - **Sentido**: se indica con una punta de flecha. Una dirección tiene dos sentidos.
  - **Punto de aplicación**: es el punto donde se aplica el vector.

Las *magnitudes vectoriales* se representan mediante una letra y una flecha en su parte superior: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, etc.$ Ejemplo: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, una fuerza, etc.

2. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS.

El **movimiento** es el cambio de posición que experimenta un cuerpo que se mueve respecto a un *sistema de referencia*.

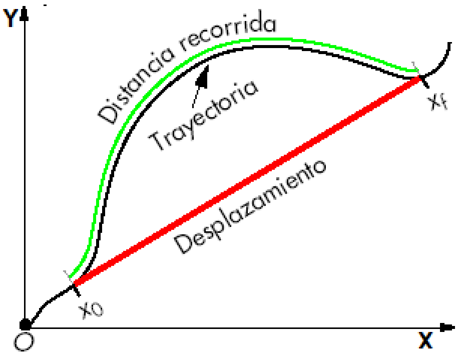
Para facilitar el estudio del *movimiento* consideraremos que sobre la superficie de la tierra hay unos elementos fijos respecto a otros que se mueven. El conjunto de elementos que consideramos fijos formará un **sistema de referencia** y el cuerpo que se mueve será el **móvil**.

En la práctica un *sistema de referencia* lo representaremos mediante unos ejes de coordenadas en cuyo origen de coordenadas está situado el observador.

En el estudio del *movimiento*, desde el punto de vista de la cinemática, hay que tener en cuenta una serie de elementos:

- **Posición**. Es el lugar que ocupa un *móvil* en el espacio respecto al *sistema de referencia*.

- **Trayectoria**. Es el camino que recorre el *móvil* en su *movimiento* respecto a un *sistema de referencia*. Si la representamos mediante una línea ésta puede ser *rectilínea* o *curvilínea*.
- **Distancia o espacio recorrido**. Es la longitud que recorre un *móvil* desde una posición a otra. Se calcula restando la posición final menos la posición inicial del móvil: *Espacio recorrido* = $\Delta s = s - s_0$. Es una magnitud escalar. En el S.I. se mide en *m.*



- **Desplazamiento**. Es la distancia entre dos puntos de la *trayectoria* medida en línea recta (aunque la *trayectoria* sea curva). Es una magnitud vectorial. El *desplazamiento* es un vector que tiene su origen en el punto inicial del movimiento y el extremo en el punto final. En general el *desplazamiento* mide menos que el *espacio recorrido*, excepto que la trayectoria sea rectilínea y el cuerpo se desplace siempre en el mismo sentido. En este caso coinciden *desplazamiento* y *espacio recorrido*.
- **Tiempo**. Es lo que tarda el *móvil* en recorrer una distancia determinada.

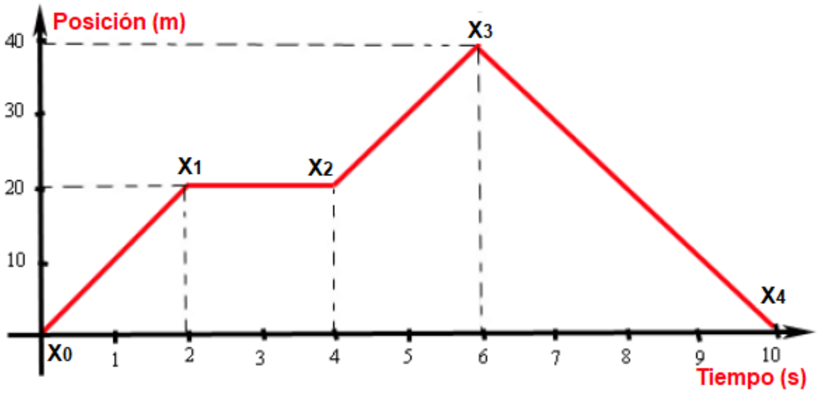
Considerando la *trayectoria* descrita por el *móvil*, el *movimiento* puede ser:

- **Rectilíneo**, cuando su trayectoria describe una línea recta.
- **Curvilíneo**, cuando la trayectoria describe una línea curva.

El **movimiento curvilíneo** puede ser:

- **Circular**, si la trayectoria es una circunferencia, como ocurre con el extremo de las manecillas de un reloj.
- **Elíptico**, si la trayectoria es una elipse, como ocurre en el movimiento planetario.
- **Parabólico**, si la trayectoria es una parábola, como ocurre en el movimiento de los proyectiles.

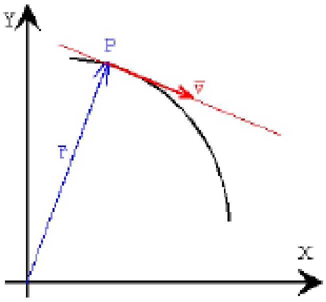
Las gráficas **Posición - Tiempo**, permiten conocer la *posición* de un cuerpo en cualquier instante. La gráfica del ejemplo, nos dice que:



- En $t = 0$ el cuerpo se encuentra en $x_0 = 0\ m$ (no se ha movido).
- En $t = 2$ el cuerpo se encuentra en $x_1 = 20\ m$.
- En $t = 4$ el cuerpo se encuentra en $x_2 = 20\ m$ (es decir, no se ha movido de 2 a 4 s).
- En $t = 6$ el cuerpo se encuentra en $x_3 = 40\ m$.
- En $t = 10$ el cuerpo se encuentra en $x_4 = 0\ m$ (vuelve a donde salió).

La **velocidad** es una magnitud vectorial. Su módulo se llama *celeridad* o *rapidez*. En valor (módulo), representa el espacio recorrido por un móvil en la unidad de tiempo. Al ser un vector, su punto de aplicación es donde esté el móvil en cada instante y el sentido el del *movimiento*.

Si el movimiento es *rectilíneo* su dirección coincide con la *trayectoria* y si es *curvilíneo* la dirección siempre es tangente a la trayectoria en el punto de aplicación.



La **velocidad media** de un cuerpo es igual al cociente entre el *espacio* recorrido y el *tiempo* empleado en recorrerlo:

$$\boldsymbol{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}}$$

La **velocidad instantánea** es la que tiene un *móvil* en cada momento. En el S.I., se mide en **m/s**, pero generalmente la unidad más utilizada es el **Km/h**. Un ejemplo de *velocidad instantánea* (o simplemente, *velocidad*) es la marcada por el velocímetro de un coche.

En la práctica medimos la *velocidad* (*instantánea*) calculando la *velocidad media* en un intervalo de tiempo muy pequeño (una décima de segundo, por ejemplo).

2.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU).

Un *móvil* presenta un **movimiento rectilíneo y uniforme** cuando su trayectoria es una línea recta y su velocidad es constante en módulo, dirección y sentido. En el *movimiento rectilíneo uniforme* la *velocidad media* y la *velocidad instantánea* tienen el mismo valor y la *aceleración* es nula. Así que:

$$\boldsymbol{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}}$$

Siendo *s* la posición en el instante *t* y s_0 la posición inicial en el instante inicial t_0.

Generalmente el tiempo inicial, t_0, es nulo por lo que $t_0 = 0$ y la fórmula queda:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t}$$

Si queremos calcular el *espacio recorrido*, despejamos *s* de la fórmula anterior:

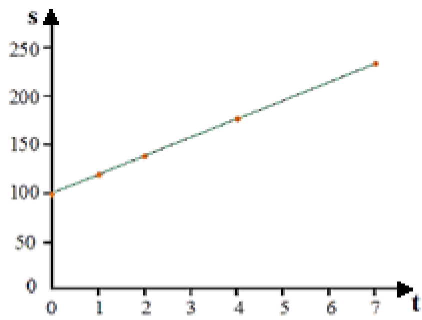
$$\boldsymbol{s = s_0 + v \cdot t}$$

Esta fórmula permite calcular las posiciones del móvil en cualquier momento. Si no se indica nada en contra, se puede suponer que en el instante inicial ($t_0 = 0$) la posición inicial es cero ($s_0 = 0$) por lo que la ecuación para calcular la *velocidad* en un momento dado quedaría aún más sencilla:

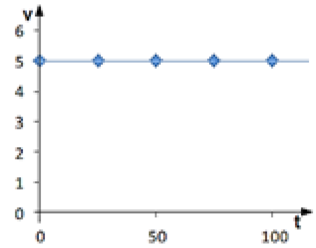
$$v = \frac{s}{t}$$

<u>**Gráfica espacio – tiempo**</u>

Esta gráfica es una recta que cuanto mayor sea la velocidad del móvil, más inclinada es la recta de la gráfica. En el *eje X* se colocan los valores del *tiempo* y en el *eje Y* los valores del *espacio*, que calculamos aplicando la fórmula: $s = s_0 + v \cdot t$.



Gráfica velocidad – tiempo



La gráfica *velocidad - tiempo* en el *MRU* siempre es una recta paralela al *eje X*, debido a que la velocidad en todo momento es constante.

Ejemplo 1: Un móvil está en el instante inicial en la posición *100 m*. Si se mueve con una velocidad uniforme de *20 m/s*, ¿en qué posición se encontrará pasados 5 s?

Suponemos que $t_0 = 0$ s, ya que no se comenta nada al respecto. Calcularemos el espacio recorrido mediante la ecuación: $s = s_0 + v \cdot t \rightarrow s = 100 + 20 \cdot 5 = 200$ m. Es decir, a **100 m más allá de su posición inicial**.

Ejemplo 2: Un *móvil A* parte de la posición inicial $s_0 = 100$ m, y se mueve a *20 m/s*. Otro *móvil B* parte del origen ($s_0 = 0$) y lleva una velocidad constante de *40 m/s*. ¿En qué instante y posición se encontrarán ambos móviles?

Las gráficas de ambas trayectorias son rectas. La ecuación de la recta que representa la trayectoria del *móvil A* será: $s = 100 + 20t$. La ecuación de la recta que representa la trayectoria del *móvil B* será: $s = 40t$. Como ambos móviles deben encontrase, igualaremos ambas ecuaciones.

$40t = 100 + 20t \rightarrow 40t - 20t = 100 \rightarrow 20t = 100 \rightarrow t = 100/20 = 5$ s.

Para $t = 5$ s, $s = 40 \cdot 5 = 200$ m. Con lo que **ambos móviles se encontrarán pasados 5 s y a una distancia de 200 m con respecto al origen**.

2.2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA).

La mayoría de los *móviles* no se mueven siempre a la misma velocidad, sino que esta va cambiando a lo largo del recorrido. Para estudiar este tipo de movimientos vamos a definir una nueva magnitud vectorial: la *aceleración*. Tiene la misma dirección y el sentido que la velocidad.

Se llama **aceleración** a la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. Si la velocidad aumenta la *aceleración* es positiva y el movimiento se llama **acelerado**, y si la velocidad disminuye (frenamos) *aceleración* es negativa y el movimiento se llama **desacelerado**.

Si un *móvil* pasa por el punto *A* en el instante t_0 con una velocidad que le llamaremos v_0 (*velocidad inicial*) y por el punto *B* en el instante *t* a otra velocidad *v* (*velocidad final*), su **aceleración media** será:

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}}$$

La **aceleración instantánea** es la aceleración de un móvil en cada instante o en un determinado punto de su trayectoria. En el S.I. la *aceleración* se mide en **m/s²**.

Si en un intervalo de tiempo la *aceleración instantánea* se mantiene constante, entonces la *aceleración media* es igual a la *instantánea* en dicho intervalo de tiempo. En este caso decimos que es un movimiento **uniformemente acelerado**.

Un *móvil* presenta un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** cuando mantiene una *trayectoria rectilínea*, su *velocidad aumenta* uniformemente a medida que transcurre el tiempo y su *aceleración es constante*. Si la *velocidad disminuye* uniformemente a medida que transcurre el tiempo es **movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado o de frenada**.

Generalmente el tiempo inicial, $t_0 = 0$ y la fórmula de la *aceleración* queda:

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}}$$

Para calcular la *velocidad final*, *v*, en un *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*, se despeja de la fórmula de la aceleración.

$$\boldsymbol{v = v_0 + a \cdot t}$$

El *espacio* que recorre un cuerpo con *movimiento uniformemente acelerado* se calcula mediante la siguiente expresión:

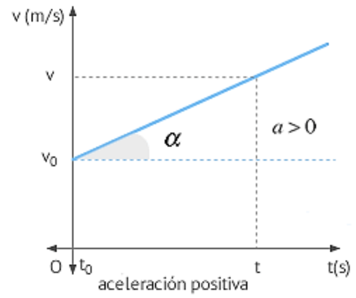
$$\boldsymbol{s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Donde s_0 = espacio inicial, v_0 = velocidad inicial, a = aceleración y t = tiempo.

Si en el instante inicial, el móvil se encuentra en el origen de coordenadas, es decir, $s_0 = 0$, la formula anterior quedaría así:

$$\boldsymbol{s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

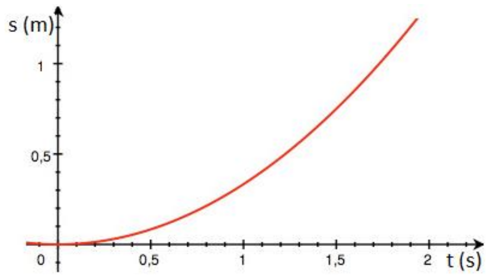
Los **movimientos de frenada** son *movimientos desacelerados*. En ellos, la *aceleración* se considera negativa, pues hace disminuir la velocidad, pero los cálculos se hacen con las mismas ecuaciones del *movimiento uniformemente acelerado*. La *velocidad final* en este tipo de movimiento es cero.



<u>Gráfica velocidad – tiempo</u>

La gráfica es una recta con pendiente positiva cuando $a > 0$ y pendiente negativa si $a < 0$.

<u>Gráfica espacio – tiempo</u>



La gráfica es una parábola, dado que no varía constantemente en función de tiempo, ya que la velocidad varia, y esto hace que recorra más o menos distancias en el tiempo.

<u>Ejemplo 1</u>: Un móvil parte del reposo ($v_0 = 0$) y acelera durante *10 s* con una aceleración $a = 4\ m/s^2$. ¿Cuántos metros avanza?

Como no hay indicación en contra, tomamos $s_0 = 0$.

$$\boldsymbol{s} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 = \boldsymbol{200\ m}$$

<u>Ejemplo 2</u>: Una vagoneta de una montaña rusa se mueve con una $v_0 = 0{,}20\ m/s$. Cae cuesta abajo con una aceleración de $2{,}9\ m/s^2$. ¿Qué velocidad tiene después de caer durante *3 s*?

$$\boldsymbol{v} = v_0 + a \cdot t = 0{,}2 + 2{,}9 \cdot 3 = \boldsymbol{8{,}9\ m/s}$$

Ejemplo 3: El conductor de un vehículo tarda en parar *5 s* después de frenar con una desaceleración de *3 m/s²*. Calcule la velocidad inicial del automóvil antes de comenzar a frenar y el espacio recorrido durante la frenada.

La desaceleración es una aceleración negativa, por lo que $a = -3\ m/s^2$. Como el vehículo consigue frenar, la velocidad final, $v = 0\ m/s^2$.

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow \boldsymbol{v_0} = v - a \cdot t = 0 - (-3) \cdot 5 = \mathbf{15\ m/s}$$

Como no hay indicación en contra, tomamos $s_0 = 0$.

$$\boldsymbol{s} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + 15 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot 5^2 = 75 - 37{,}5 = \mathbf{37{,}5\ m}$$

2.2.1. MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE.

Un caso particular de un MRUA es el **movimiento de caída libre**. En este caso la aceleración que aparece es la de la gravedad, **g = 9,8 m/s²**. Las fórmulas a aplicar son las mismas que el MRUA salvo que en este caso, **a = g**.

Se supone que el origen de coordenadas está en el lugar desde donde se deja caer el cuerpo (punto inicial), con lo que, $s_0 = 0$.

En la caída libre, el cuerpo cae por su propio peso, por lo que la velocidad inicial, v_0, es cero. La fórmula que nos permite calcular el *espacio recorrido* será esta:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$$

Y la fórmula de la *velocidad final* será esta:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{t}$$

Ejemplo 1: Una maceta cae desde una terraza. Tarda cuatro segundos en romper contra el suelo. Calcula la velocidad con la que choca contra el suelo y la altura desde la que cayó.

a) Aunque no nos los dan, hay dos datos que conocemos: como la caída es libre, $v_0 = 0$. La aceleración de caída es la gravedad, por lo que $a = g = 9{,}8 m/s^2$.

$$\boldsymbol{v} = v_0 + g \cdot t = 0 + 9{,}8 \cdot 4 = \mathbf{39{,}2\ m/s}$$

b) Consideramos $s_0 = 0$, al considerar como origen de coordenadas el lugar desde donde cae la maceta.

$$\boldsymbol{s} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 4^2 = \mathbf{78{,}4\ m}$$

Ejemplo 2: Una saltadora de trampolín artístico se deja caer desde la plataforma de saltos, situada a *8 m* sobre el agua de la piscina. Determina el tiempo que tarda en llegar al agua y la velocidad de impacto contra el agua.

Suponemos que $s_0 = 0$, $v_0 = 0$ y $a = g = 9{,}8 m/s^2$. Para calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo, utilizaremos la fórmula del espacio recorrido.

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2; 8 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 \rightarrow \boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{16}{9{,}8}} = \mathbf{1{,}28\ s}$$

La velocidad de llegada coincidirá con la velocidad final de caída libre.

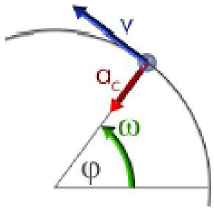
$$\boldsymbol{v} = v_0 + g \cdot t = 0 + 9{,}8 \cdot 1{,}28 = \mathbf{12{,}5\ m/s}$$

2.3. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU).

Un *móvil* presenta un **movimiento circular uniforme** si su *trayectoria* es una circunferencia y gira con *velocidad constante* (en módulo).

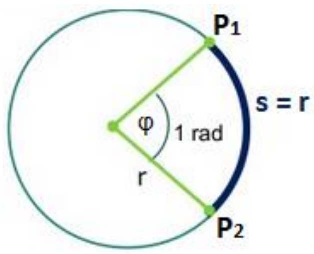
Aunque el *movimiento circular* sea *uniforme* y el *módulo de la velocidad* sea constante, su *velocidad* es variable porque su dirección, que es tangente a la trayectoria en cada punto, cambia continuamente.

Recuerda que el *módulo de la velocidad* es una magnitud escalar que no cambia durante el MCU, mientras que la *velocidad* es un vector que sí cambia constantemente, porque cambia su dirección, de lo cual se deduce que el *móvil* experimenta *aceleración*.



La *aceleración* de un *movimiento circular uniforme* se denomina **aceleración centrípeta o normal** que obliga al *móvil* a describir la trayectoria circular. Su dirección es radial y sentido hacía el centro de la circunferencia, siendo su valor: $\boldsymbol{a_C = v^2/r}$.

En el *movimiento circular* vamos a relacionar magnitudes lineales y angulares. Cuando el *móvil* recorre la trayectoria desde P_1 a P_2 (arco de circunferencia) el radio barre el ángulo *φ*. El ángulo se mide en *radianes* y el arco en metros.



Para establecer una relación entre el ángulo y el arco se define el *radian*. Un **radián** es el ángulo de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma.

Para determinar el ángulo *φ*, en radianes, de un arco de longitud *s* en una circunferencia de radio *r* utilizaremos la expresión: **φ = s/r**.

La **velocidad angular** en un *movimiento circular uniforme*, **ω**, es la relación entre el ángulo *φ*, medido en radianes y el tiempo que tarda en recorrerlo: **ω = φ/t**. Su unidad es **rad/s**, aunque con frecuencia se utiliza otra unidad, **r.p.m.** (*revoluciones o vueltas por minuto*).

$$\boldsymbol{1\ r.p.m. = \frac{2\pi}{60}\ \frac{rad}{s}}$$

Relación entre la *velocidad angular* y la *velocidad lineal* es la siguiente:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\varphi}{t} = \frac{s/r}{t} = \frac{v}{r}\ ; \boldsymbol{v = \omega \cdot r}$$

<u>Ejemplo 1</u>: El DJ de una discoteca utiliza en sus sesiones de música un disco de vinilo que gira a razón de *33 rpm*. Calcula la velocidad en *rad/s*.

$$\boldsymbol{33\ r.p.m.} = 33 \cdot \frac{2\pi}{60} = \boldsymbol{3,45\ \frac{rad}{s}}$$

<u>Ejemplo 2</u>: El disco duro de un ordenador gira con una velocidad angular de *4200 vueltas por minuto*. El diámetro del disco duro es de *10 cm*. Calcula la velocidad angular en unidades del S.I. y la velocidad con que se mueve el borde del disco.

$$\boldsymbol{\omega} = 4200 \cdot \frac{2\pi}{60} = \boldsymbol{439,82\frac{rad}{s}}$$

$$\boldsymbol{v} = \omega \cdot r = 439{,}82 \cdot 0{,}05 = 21{,}99 \approx \boldsymbol{22\ m/s}$$

RESUMEN DEL TEMA 7

1. INTRODUCCIÓN.

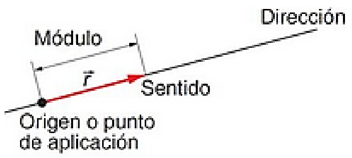
La parte de la *física* que estudia el **movimiento** es la **Mecánica** y comprende dos ramas: la Cinemática y la Dinámica.

La **Cinemática** es la rama de la *Física* que estudia el movimiento sin tener en cuenta las causas (las fuerzas) que lo producen, limitándose al estudio de la *trayectoria* recorrida.

1.1. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.

Una **magnitud física** es una propiedad que podemos observar en cualquier cuerpo y que podemos darle un valor numérico mediante un proceso de medida. Hay dos tipos de *magnitudes físicas*:

- **Magnitud escalar**: es aquella que queda definida con un número y su correspondiente unidad. Ejemplo: la masa, el volumen, la densidad, etc.
- **Magnitud vectorial**: es aquella que se representa mediante un *vector*. A su vez, éste queda definido por cuatro elementos:



  - **Módulo**: es el valor numérico de la magnitud.
  - **Dirección**: es la de la recta que contiene al vector.
  - **Sentido**: se indica con una punta de flecha. Una dirección tiene dos sentidos.
  - **Punto de aplicación**: es el punto donde se aplica el vector.

  Las *magnitudes vectoriales* se representan mediante una letra y una flecha en su parte superior: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, etc.$ Ejemplo: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, una fuerza, etc.

2. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS.

Un cuerpo está en **movimiento** cuando cambia su posición respecto de un *sistema de referencia* que se considera fijo.

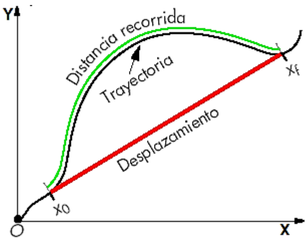
El **sistema de referencia** estará formado el conjunto de elementos que consideramos fijos, respecto de otros que se mueven, que llamaremos **móviles**. Un *móvil* es cualquier cuerpo que se mueve.

En la práctica un *sistema de referencia* lo representaremos mediante unos ejes de coordenadas en cuyo origen de coordenadas está situado el observador.

En el estudio del *movimiento*, desde el punto de vista de la cinemática, hay que tener en cuenta una serie de elementos:

- **Posición**. Es el punto en el que está el *móvil* en un instante determinado, respecto al *sistema de referencia*.
- **Trayectoria**. Es el camino que recorre el *móvil* en su *movimiento* respecto a un *sistema de referencia*. Si la representamos mediante una línea ésta puede ser *rectilínea* o *curvilínea*.

- **Distancia o espacio recorrido**. Es la longitud que recorre un *móvil* desde una posición a otra. Se calcula restando la posición final menos la posición inicial del móvil: *Espacio recorrido* = $\Delta s = s - s_0$. Es una magnitud escalar.



- **Desplazamiento**. Es la distancia entre dos puntos de la *trayectoria* medida en línea recta (aunque la *trayectoria* sea curva). Es una magnitud vectorial. En general el *desplazamiento* mide menos que el *espacio recorrido*, excepto que la trayectoria sea rectilínea. En este caso coinciden *desplazamiento* y *espacio recorrido*.
- **Tiempo**. Es lo que tarda el *móvil* en recorrer una distancia determinada.

Considerando la *trayectoria* descrita por el *objeto o móvil*, el *movimiento* puede ser:

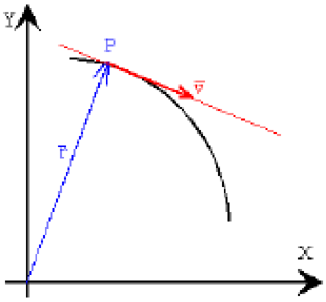
- **Rectilíneo**, cuando su trayectoria describe una línea recta.
- **Curvilíneo**, cuando la trayectoria describe una línea curva.

El **movimiento curvilíneo** puede ser:

- **Circular**, si la trayectoria es una circunferencia, como ocurre con el extremo de las manecillas de un reloj.
- **Elíptico**, si la trayectoria es una elipse, como ocurre en el movimiento planetario.
- **Parabólico**, si la trayectoria es una parábola, como ocurre en el movimiento de los proyectiles.

La *velocidad* es una magnitud vectorial. Si indicamos sólo su valor (módulo), la información no es completa. Es necesario conocer además la *dirección* y el *sentido*.

En módulo, la **velocidad** representa el espacio recorrido por un móvil en la unidad de tiempo. Al ser un vector, su punto de aplicación es donde esté el móvil en cada instante y el sentido el del *movimiento*. Si el movimiento es *rectilíneo*, su dirección coincide con la *trayectoria* y si es *curvilíneo*, la dirección siempre es tangente a la trayectoria en el punto de aplicación.



La **velocidad media** de un cuerpo es igual al cociente entre el *espacio* recorrido y el *tiempo* empleado en recorrerlo:

$$\boldsymbol{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}}$$

Si quisiéramos conocer la *velocidad* que tiene un móvil en cada instante del movimiento, tendríamos que hallar el cociente entre un espacio pequeñísimo recorrido por el móvil en ese instante y el tiempo invertido en recorrerlo. Ésta es la **velocidad instantánea**.

En el S.I. la **velocidad** se mide en **m/s**, pero como sabes, generalmente la unidad más utilizada es el **Km/h**.

2.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU).

Un *móvil* lleva un **movimiento rectilíneo y uniforme** cuando su *trayectoria es una línea recta* y su *velocidad es constante* en módulo, dirección y sentido. En el *movimiento rectilíneo* *uniforme* la *velocidad media* y la *velocidad instantánea* tienen el mismo valor y la *aceleración* es nula. Así que la expresión que nos permite calcular la velocidad será:

$$\boldsymbol{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}}$$

Siendo *s* la posición en el instante *t* y s_0 la posición inicial en el instante inicial t_0.

Si en el instante inicial $t_0 = 0$, la fórmula queda:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t}$$

Si queremos calcular el *espacio recorrido*, despejamos *s* de la fórmula anterior:

$$\boldsymbol{s = s_0 + v \cdot t}$$

Si en el instante inicial, $t_0 = 0$ y la posición inicial es cero ($s_0 = 0$) la *velocidad* en un momento dado quedaría aún más sencilla: $v = s/t$.

2.2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA).

Para el estudio del movimiento en los que la velocidad un móvil no es siempre la misma, debemos definir una nueva magnitud vectorial: la *aceleración*. Ésta tiene la misma dirección y el sentido que la velocidad.

Se llama **aceleración** a la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. Si la velocidad aumenta la *aceleración* es positiva y el movimiento se llama **acelerado**, y si la velocidad disminuye (frenamos) *aceleración* es negativa y el movimiento se llama **desacelerado**.

Si un *móvil* pasa por el punto *A* en el instante t_0 con una *velocidad inicial* v_0 y por el punto *B* en el instante *t* a otra velocidad *v* (*velocidad final*), su **aceleración media** será:

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}}$$

La **aceleración instantánea** es la aceleración de un móvil en cada instante o en un determinado punto de su trayectoria. En el S.I. la *aceleración* se mide en $\mathbf{m/s^2}$.

Si en un intervalo de tiempo la *aceleración instantánea* se mantiene constante, entonces la *aceleración media* es igual a la *instantánea* en dicho intervalo de tiempo. En este caso decimos que es un movimiento **uniformemente acelerado**.

Un *móvil* lleva un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (o retardado)** cuando mantiene una *trayectoria rectilínea* y su *velocidad varía* (aumenta o disminuye) uniformemente (*aceleración es constante*). Si la *velocidad disminuye* uniformemente a medida que transcurre el tiempo es **movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado o de frenada**.

Generalmente el tiempo inicial, $t_0 = 0$ y la fórmula de la *aceleración* queda:

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}}$$

La *velocidad final*, *v*, en un *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*, será:

$$\boldsymbol{v = v_0 + a \cdot t}$$

El *espacio* que recorre un cuerpo con *movimiento uniformemente acelerado* será:

$$\boldsymbol{s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Donde s_0 = espacio inicial, v_0 = velocidad inicial, *a* = aceleración y *t* = tiempo.

Si en el instante inicial, el móvil se encuentra en el origen de coordenadas, es decir, $s_0 = 0$, la formula anterior quedaría así:

$$\boldsymbol{s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Los **movimientos de frenada** son *movimientos desacelerados*. En ellos, la *aceleración* se considera negativa, pues hace disminuir la velocidad, pero los cálculos se hacen con las mismas ecuaciones del *movimiento uniformemente acelerado*. La *velocidad final* en este tipo de movimiento es cero.

2.2.1. MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE.

El **movimiento de caída libre** es un caso particular de un MRUA. En este caso la aceleración que aparece es la de la gravedad, **g = 9,8 m/s²**. Las fórmulas a aplicar son las mismas que el MRUA salvo que en este caso, **a = g**.

Si tomamos como origen de coordenadas el lugar desde donde se deja caer el cuerpo (punto inicial), entonces, $s_0 = 0$. En la caída libre, el cuerpo cae por su propio peso, con lo que $v_0 = 0$.

La fórmula que nos permite calcular el *espacio recorrido* será:

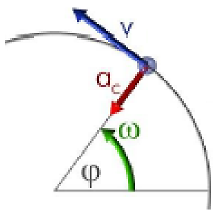
$$\boldsymbol{s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$$

Y la fórmula de la *velocidad final* será:

$$\boldsymbol{v = g \cdot t}$$

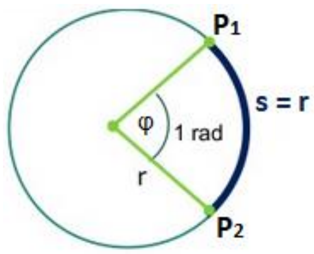
2.3. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU).

El **movimiento circular uniforme (MCU)** es un movimiento de trayectoria circular en el que la *velocidad angular* es constante. Esto implica que describe ángulos iguales en tiempos iguales. En él, el vector *velocidad* no cambia de módulo pero sí de dirección (es tangente en cada punto a la trayectoria). Esto quiere decir que no tiene *aceleración tangencial* ni *aceleración angular*, aunque sí *aceleración normal*. Esto provoca que en el MCU siempre haya *aceleración*.



La aceleración de un movimiento circular uniforme se denomina **aceleración centrípeta o normal** que obliga al *móvil* a describir la trayectoria circular. Su dirección es radial y sentido hacía el centro de la circunferencia, siendo su valor: $\boldsymbol{a_C = v^2/r}$.

En el *movimiento circular* vamos a relacionar magnitudes lineales y angulares. Para establecer una relación entre el ángulo y el arco se define el *radian*. Un **radián** es el ángulo de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma.



Para determinar el ángulo *φ*, en radianes, de un arco de longitud *s* en una circunferencia de radio *r* utilizaremos la expresión: **φ = s/r**.

La **velocidad angular** en un *movimiento circular uniforme*, **ω**, es la relación entre el ángulo *φ*, medido en radianes y el tiempo que tarda en recorrerlo: **ω = φ/t**. Su unidad es **rad/s**, aunque con frecuencia se utiliza otra unidad, **r.p.m.** (*revoluciones o vueltas por minuto*).

$$\mathbf{1\ r.p.m.} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{60}}\ \frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{s}}$$

Relación entre la *velocidad angular* y la *velocidad lineal* es la siguiente:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\varphi}{t} = \frac{s/r}{t} = \frac{v}{r}\ ;\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}$$

<u>ACTIVIDADES DEL TEMA 8</u>: "CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS DE INTERÉS".

1. **Una persona va en monopatín a 18 Km/h. ¿Qué distancia recorrerá en 3 minutos? (4.1. → B)**

2. **En ciudad, la velocidad máxima permitida es de 50 Km/h Si ves un peligro y tardas un segundo en reaccionar, ¿cuántos metros recorre aproximadamente el coche antes de que empieces a frenar? (4.1. → B)**

3. **En la siguiente tabla se recogen los datos de un coche que va desde Palencia a Valladolid.**

Tiempo (h)	15 h	15,15 h	15,25 h	15,35 h	15,45 h
Posición (Km)	0	20	20	35	47

Indica: (4.1. → B)

a) El tiempo que estuvo el coche parado y en marcha.

b) El tiempo que duro el viaje.

c) Calcula la velocidad media.

4. **Un ciclista pasa por la posición s_0 = 100 m cuando t_0 = 0 s, y por la posición s = 300 m cuando t = 22 s. Suponiendo que va siempre a la misma velocidad, calcula su valor y el instante en el que pasará por la posición s = 1000 m. (4.1. → B)**

5. **Un móvil A parte de la posición inicial s_0 = 100 m, y se mueve a 20 m/s; otro móvil B parte del origen (s_0 = 0) y lleva una velocidad constante de 40 m/s. indica la posición y el tiempo en que B alcanza a A. (4.1. → B)**

6. **Cierta avioneta necesita alcanzar una velocidad de 220 km/h para despegar. ¿Qué aceleración, supuesta constante, necesita comunicar a los motores para que despegue a los 4,8 s de iniciar la operación? (4.1. → B)**

7. **Un coche circula a una velocidad de 93 Km/h y frena durante 3 s para tomar una curva a la velocidad más moderada de 77 Km/h, inferior a los 80 Km/h que recomienda la señal de tráfico. ¿Qué desaceleración se le comunicó? (4.1. → B)**

8. **Un móvil realiza un MRUA tardando 0,75 s en aumentar la velocidad en 0,55 m/s. ¿Qué aceleración posee? ¿qué espacio recorrerá a los 60 s de iniciado el movimiento? (4.1. → B)**

9. Un avión comienza a rodar con una aceleración de 40 m/s^2 hasta alcanzar la velocidad de despegue de 600 Km/h. Calcula la longitud mínima que debe tener la pista de despegue. (4.1. → B)

10. Un cuerpo se mueve desde una posición s_0 = 2 m durante 4 s con una aceleración de 5 m/s^2. Si la velocidad inicial era de 20 m/s, ¿cuál es su posición final? (4.1. → B)

11. Un paracaidista se tira desde una altura de 1000 m. El paracaídas no abre. ¿Con qué velocidad choca contra el suelo el desafortunado paracaidista? La velocidad con la que realmente impacta contra el suelo, aunque mortal, es mucho menor que la calculada. ¿Por qué? (4.1. → B)

12. Se deja caer un cuerpo en reposo desde una altura desconocida y después de transcurridos unos seis segundos el objeto toca el suelo. ¿A qué velocidad llego al suelo? ¿Desde qué altura se soltó el objeto? (4.1. → B)

13. Las ruedas de un automóvil de 70 cm de diámetro giran a razón de 100 r.p.m. Calcula la velocidad (lineal) de dicho automóvil. (4.1. → B) (4.2. → I)

14. El velocímetro de una moto en un circuito circular marca siempre 100 Km/h. Si el radio de las ruedas es de 50 cm. Calcula la velocidad angular de la rueda y exprésala en rpm. (4.1. → B) (4.2. → I)

15. Calcula la aceleración centrípeta o normal de un objeto que gira a 3 rad/s y su radio de giro es de 1 m. (4.1. → B) (4.2. → I)

SOLUCIONES

1. **Solución:**

   Datos: *v = 18 km/h*; *t = 3 min*.

   v = 18 km/h = 18000 m/3600 s = 5 m/s

   t = 3 min = 3 ·60 s = 180 s.

   v = s/t → ***s*** *= v ·t = 5 ·180 =* ***900 m***.

2. **Solución:**

   v = 50 km/h = 50000 m/3600 s = 13,89 m/s. Es decir, que en un segundo habrás recorrido **13,89 metros**.

3. **Soluciones:**

   a) Estuvo parado de *15,15 h* a *15,25 h*.

   b) tiempo del viaje = $t - t_0$ = *15,45 – 15 = 0,45 h*.

   c) Velocidad media:

$$\boldsymbol{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{47 - 0}{15{,}45 - 15} = \frac{47}{0{,}45} = \mathbf{104{,}44\ \boldsymbol{Km/h}}.$$

4. **Soluciones:**

   Datos: $s_0 = 100\ m$; $t_0 = 0\ s$; *s = 300 m*; *t = 22 s*.

$$\boldsymbol{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{300 - 100}{22 - 0} = \mathbf{9{,}09\ \boldsymbol{m/s}}.$$

   Si tomamos como posición inicial la posición $s_0 = 100\ m$,

$$\boldsymbol{t} = \frac{s - s_0}{v} = \frac{1000 - 100}{9{,}09} = \mathbf{99{,}01\ \boldsymbol{s}}$$

5. **Soluciones:**

   La ecuación que nos permite determinar la posición de cada móvil es la siguiente: $s = s_0 + v·t$.

   - Ecuación de la posición de *móvil A*: *s = 100 + 20·t*.
   - Ecuación de la posición del *móvil B*: *s = 0 + 40·t = 40·t*.

     Si *B* alcanza a *A*, ambas rectas coincidirán en un punto. Es decir,

     100 + 20·t = 40·t → *100 = 20 t* → *t = 100/20 = 5 s.*

     El *móvil B* alcanzará al *móvil A* pasados **5 segundos**.

     Para *t = 5 s*, la **distancia recorrida** será de: *s = 40·t = 40·5 =* ***200 m***.

6. **Solución:**

   Datos: *v = 220 Km/h = 61,11 m/s*; *t = 4,8 s*.

   Suponemos que $t_0 = 0\ s$ y $v_0 = 0\ m/s$.

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0) \rightarrow v = a \cdot t \rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{v}{t} = \frac{61{,}11}{4{,}8} = \mathbf{12{,}73\ \boldsymbol{m/s^2}}.$$

7. **Solución:**

   Datos: v_0 = *93 Km/h = 25,83 m/s*; *v = 77 Km/h = 21,39 m/s*; *t = 3 s*.

$$\boldsymbol{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{21{,}39 - 25{,}83}{3} = \boldsymbol{-1{,}48\ m/s^2}.$$

8. Soluciones:

Datos: $\Delta v = 0{,}55\ m/s^2$; $\Delta t = 0{,}75\ s$; $t = 60\ s$.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{0{,}55}{0{,}75} = \boldsymbol{0{,}73\ m/s^2}.$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Suponiendo que $s_0 = 0$ y $v_0 = 0$, el espacio recorrido para $t = 60\ s$ será:

$$\boldsymbol{s} = 0 + 0 \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}73 \cdot 60^2 = \boldsymbol{1314\ m}.$$

9. Solución:

Datos: $a = 40\ m/s^2$; $v = 600\ Km/h = 166{,}67\ m/s$.

Suponiendo que $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$, $v = a \cdot t \rightarrow t = v/a = 166{,}67/40 = 4{,}17\ s$.

Ese es el tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad con la aceleración que lleva.

Calculemos ahora el espacio que recorrerá en ese tiempo, es decir, la longitud mínima de la pista.

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (4{,}17)^2 = \boldsymbol{347{,}78\ m}.$$

10. Solución:

Datos: $s_0 = 2\ m$; $t = 4\ s$; $a = 5\ m/s^2$; $v_0 = 20\ m/s$.

$$\boldsymbol{s} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 2 + 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 = \boldsymbol{122\ m}.$$

11. Solución:

Datos: $s_0 = 0\ m$; $v_0 = 0\ m/s$; $a = g = 9{,}8\ m/s^2$.

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow 1000 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{1000 \cdot 2}{9{,}8} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2000}{9{,}8}} = 14{,}285\ s.$$

$$\boldsymbol{v} = v_0 + g \cdot t = 0 + 9{,}8 \cdot 14{,}285 = \boldsymbol{140\ m/s}.$$

En realidad la velocidad de impacto es menor que la calculada ya que no hemos tenido en cuenta el rozamiento contra el aire.

12. Soluciones:

Datos: $s_0 = 0\ m$; $v_0 = 0\ m/s$; $a = g = 9{,}8\ m/s^2$; $t = 6\ s$.

$$\boldsymbol{v} = v_0 + g \cdot t = 0 + 9{,}8 \cdot 6 = \boldsymbol{58{,}8\ m/s}$$

$$\boldsymbol{s} = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 6^2 = \boldsymbol{176{,}4\ m}$$

13. Solución:

Datos: $\omega = 100$ r.p.m.; $r = 35\ cm = 0{,}35\ m$.

100 r.p.m. = 100·2π/60 = 10,47 rad/s.

$$\boldsymbol{v} = \omega \cdot r = 10{,}47 \cdot 0{,}35 = \boldsymbol{3{,}67\ m/s}.$$

14. Solución:

Datos: v = *100 Km/h = 27,78 m/s*; r = *50 cm = 0,5 m*.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{r} = \frac{27{,}78}{0{,}5} = 55{,}56\frac{rad}{s} = \frac{55{,}56 \cdot 60}{2\pi} = \mathbf{530{,}62\ r.p.m.}$$

15. Solución:

Datos: ω = *3 rad/s*; r = *1m*.

$$\boldsymbol{a_C} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r = 3^2 \cdot 1 = \mathbf{9\ m/s^2}.$$

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 12: TRIGONOMETRÍA. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR.

TEMA 8. DINÁMICA. FUERZAS DE INTERÉS.

1. LAS FUERZAS.

La **Física** es la parte de la ciencia que estudia los *fenómenos físicos*: los describe, los analiza y descubre las leyes que los rigen.

En física, la **fuerza** es un *fenómeno físico* capaz de modificar la velocidad de movimiento y/o la estructura (deformación) de un cuerpo. Es decir, es aquella acción o influencia que deforma o cambia el movimiento de un cuerpo.

La **Dinámica** es la parte de la *Física* que estudia el movimiento teniendo en cuenta las causas que lo producen, a través de las tres *leyes de Newton*.

1.1. CONCEPTO DE FUERZA.

Denominamos **fuerza** a toda causa capaz de producir una *deformación* o *cambiar el estado* de reposo o de movimiento de un cuerpo.

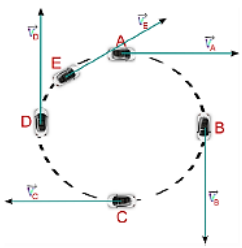
La *fuerza* es una *magnitud física*, es decir, se puede medir. Su unidad en el S.I. es el **newton (N)**. Un *newton* equivale a la fuerza que hay que aplicar a un cuerpo que tiene una masa de *1 kg* para comunicarle una aceleración de $1\ m/s^2$. Otra unidad de medida muy utilizada es el **Kilopondio (kp)**, unidad de medida del Sistema Técnico, siendo **1 kp = 9,8 N**.

Para medir las *fuerzas* se utiliza el **dinamómetro**. Éste se fundamenta en la capacidad elástica que tienen algunos resortes metálicos, especialmente el acero. El alargamiento que se produce en el muelle es proporcional a los pesos colocados en el mismo.

Las *fuerzas* pueden producir varios efectos sobre los cuerpos:

- **Deformar un cuerpo**. Una fuerza puede cambiar la forma o el tamaño de un cuerpo. Ejemplo: Estirando una goma.
- **Cambiar la velocidad de un cuerpo**. Una fuerza puede modificar la velocidad de un móvil de tres formas:

  - **Cambiando el valor numérico de la velocidad**: es decir, haciendo que el cuerpo vaya más rápido o más lento. Ejemplo: aumentando la velocidad de un coche o deteniendo un balón.



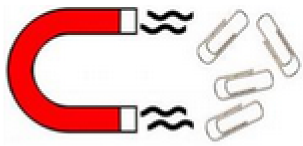
  - **Cambiando la dirección de la velocidad**: es decir, modificando su trayectoria. Si un cuerpo está en movimiento, su trayectoria será rectilínea, excepto que ejerzamos una fuerza sobre él. Ejemplo: la que ejercemos sobre el volante del coche para que éste gire.

  - **Cambiando el sentido del movimiento**: Ejemplo: como cuando una pelota rebota contra una pared o cuando la golpeamos con una raqueta.

Las *fuerzas* pueden actuar por **contacto** o **a distancia**.

- **Fuerza de contacto**: Cuando existe contacto directo entre el cuerpo que ejerce la fuerza y el cuerpo sobre el cual se ejerce dicha fuerza. <u>Ejemplos</u>: dar una patada a un balón, moldear plastilina con los dedos, empujar una puerta, pisar nieve, etc.

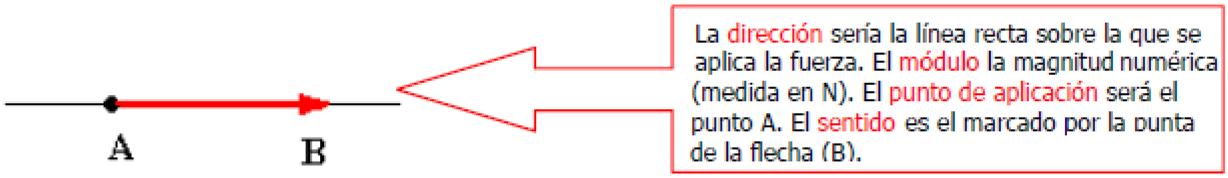
- **Fuerza a distancia**: aquellas en la que no existe contacto directo entre el cuerpo que ejerce la fuerza y el cuerpo sobre el que se aplica. <u>Ejemplos</u>: la fuerza de la gravedad que hace que los cuerpos caigan al suelo (fuerzas gravitatorias), la fuerza de un imán (fuerzas magnéticas), etc.



1.2. CARÁCTER VECTORIAL DE LAS FUERZAS.

Para que una fuerza quede perfectamente definida, no basta con conocer su valor numérico. Necesitamos, además, saber dónde se aplica esa fuerza y si la aplicamos en una u otra dirección o en un sentido o en otro.

Una **fuerza** es una **magnitud vectorial** y la describiremos por un **vector**. Recuerda que un *vector* es un segmento orientado que consta de *punto de aplicación*, *módulo*, dirección y *sentido*.



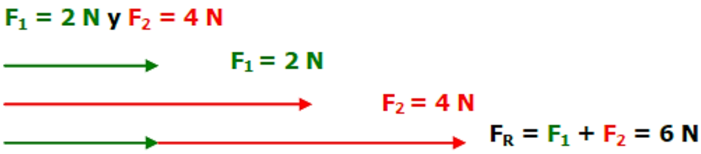
1.2.1. SUMA DE FUERZAS.

Las fuerzas al ser *magnitudes vectoriales* no se suman de la misma forma que las *magnitudes escalares* puesto que, además del *valor numérico* (el *módulo*), poseen *dirección* y *sentido*.

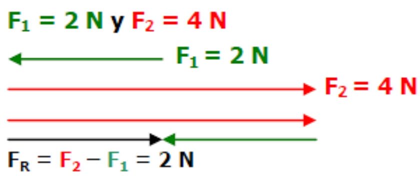
Normalmente sobre un cuerpo actúa siempre más de una fuerza, es decir, estas forman un **sistema de fuerzas**. Cada una de ellas se llama *componente*. La *fuerza* que produce el mismo efecto que todas ellas es la llamada **fuerza resultante**.

Para calcular la *fuerza resultante* de un *sistema de fuerzas* tenemos que sumar todos los vectores que actúan sobre el cuerpo.

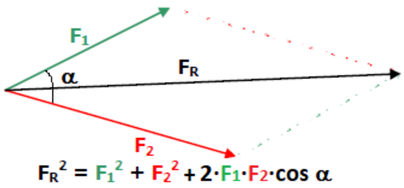
- **Suma de fuerzas con la misma dirección y sentido**. Si dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ actúan sobre un cuerpo en la misma dirección y sentido, la **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ tendrá la misma dirección y sentido que ellas y su módulo será la suma de los módulos.



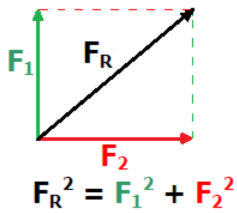
- **Suma de fuerzas con la misma dirección y sentido contrario**. En este caso la **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ tendrá la misma dirección de las fuerzas componentes, el sentido de la mayor de ellas y el módulo será la diferencia de los módulos.



- **Suma de fuerzas con diferentes direcciones**. Se aplica el *método gráfico del paralelogramo*. La ***fuerza resultante*** **F_R** será la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas componentes. El *módulo* de la *fuerza resultante* se calcula mediante la fórmula indicada o bien gráficamente dibujando las fuerzas a escala.

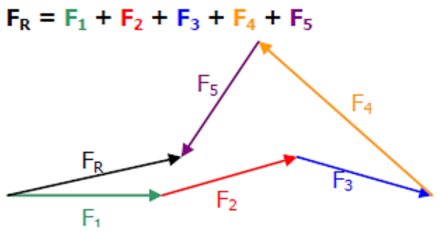


En el caso especial, y frecuente, de tener que sumar dos *vectores perpendiculares*, podemos calcular el *módulo* de la *fuerza resultante* usando el *teorema de Pitágoras*:



$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

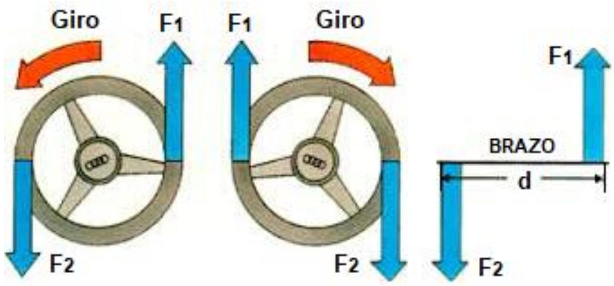
- **Resultante de varias fuerzas de diferente dirección**. Aplicamos el *método del polígono*. Colocamos el punto de aplicación de cada fuerza sobre el extremo de la anterior. La *fuerza resultante* se obtiene gráficamente uniendo el punto de aplicación de la primera fuerza con el extremo de la última. El *módulo* de la *fuerza resultante* no es la suma de los módulos de las fuerzas concurrentes.



1.2.2. PAR DE FUERZAS.

Cuando giramos el volante de un coche, abrimos o cerramos un grifo o apretamos las tuercas de la rueda del coche con una llave, estamos aplicando sobre estos objetos un *par de fuerzas*.

Un **par de fuerzas** es un sistema formado por dos fuerzas paralelas entre sí, de igual módulo y de sentidos contrarios, que produce un **movimiento de rotación** o **giro**. La magnitud de la rotación depende del valor de las fuerzas que forman el *par* y de la *distancia* entre ambas, llamada **brazo del par**.



Aunque la *fuerza resultante* de estas dos fuerzas es cero (puesto que tienen la misma dirección, sentido contrario y el mismo módulo: $F_R = F - F = 0$), sin embargo, los **momentos** de cada fuerza del par, producen el giro.

El **momento** de un *par de fuerzas*, **M**, es una magnitud vectorial que tiene por módulo el producto de cualquiera de las *fuerzas* por la distancia (perpendicular) entre ellas, *d*. Esto es:

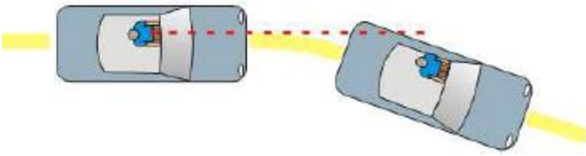
$$M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$$

2. LEYES DE NEWTON.

2.1. PRIMERA LEY DE NEWTON.

Denominada **Ley de la Inercia**. Dice que "*Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante mientras no actúe sobre él alguna fuerza exterior o la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea nula*".

La tendencia natural que tienen los cuerpos a seguir parados o a seguir moviéndose en línea recta y velocidad constante se llama **inercia**.



Las conclusiones de la *Ley de Inercia* son:

- Para que un cuerpo que se encuentra en reposo comience a moverse hay que aplicarle una fuerza.
- Si un cuerpo se desplaza con velocidad constante continuará haciéndolo indefinidamente a no ser que se le aplique alguna fuerza.

Sabemos que un cuerpo que se mueve a velocidad constante y sobre el que no actúan fuerzas exteriores no continúa indefinidamente en ese estado, sino que acaba parándose. Esto se debe a un tipo de fuerza llamada *fuerza de rozamiento* que luego veremos.

Ejemplo: Un persona está de pie en un autobús parado. El conductor pone en marcha el autobús. Si la persona lleva las manos en los bolsillos (no va agarrado a nada). ¿Qué le ocurre? ¿Por qué?

El autobús arranca y se mueve hacia delante, pero la persona tiene tendencia a quedarse en el sitio en que estaba inicialmente, por lo que caerá hacia atrás en el autobús. Esto se debe a la inercia que tiene la persona.

2.2. SEGUNDA LEY DE NEWTON.

Denominada **Ley de la dinámica**. Dice que ""*La fuerza resultante que se ejerce sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que dicha fuerza produce, donde la constante de proporcionalidad es la masa del* cuerpo". Matemáticamente se expresa: $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$.

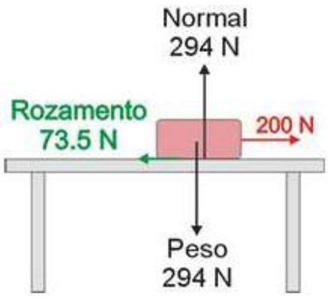
La *aceleración* del cuerpo tendrá la misma dirección y el mismo sentido que la *fuerza resultante*.

Esta ley nos dice que todo cuerpo sometido a una *fuerza resultante* poseerá un *movimiento acelerado* que dependerá de la masa de dicho cuerpo.

Ejemplo: Sobre una masa de *30 Kg* situada sobre una superficie horizontal, ejercemos una fuerza de *200 N*. Calcula la aceleración con que se moverá dicha masa. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la mesa es *0,25*.

Hay cuatro fuerzas que actúan sobre el cuerpo, la de *200 N* que hacemos nosotros, el peso, la normal y el rozamiento. Calculemos el valor de cada una de ellas:

- $P = m.g = 30 \cdot 9{,}8 = 294\ N$.
- $N = P = 294\ N$, dado que la superficie es horizontal.
- $F_r = \mu \cdot N = 0{,}25 \cdot 294 = 73{,}5\ N$.

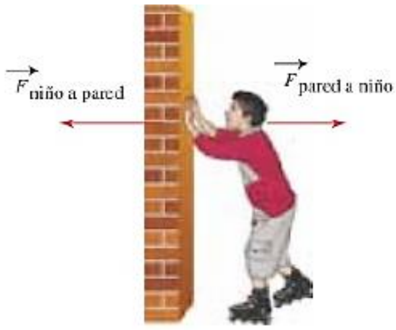


Tenemos que calcular la suma de fuerzas. La normal más el peso se anulan, y la fuerza resultante es: $F_R = 200 - 73{,}5 = 126{,}5\ N$.

Por tanto, $\boldsymbol{a} = F_R/m = 126{,}5/30 = \boldsymbol{4{,}22\ m/s^2}$.

2.3. TERCERA LEY DE NEWTON.

Denominada **Ley del principio de acción y reacción**. Dice que ""*Si un cuerpo produce una fuerza (acción) sobre otro, éste responde con una fuerza (reacción) sobre el primero, del mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario*". Estas fuerzas sólo se diferencian en el punto de aplicación.



Una aplicación del *principio de acción y reacció*n es el lanzamiento de naves espaciales, satélites artificiales, etc. La fuerza de los gases de combustión sobre el suelo es la misma con la que se impulsa la nave hacia arriba.

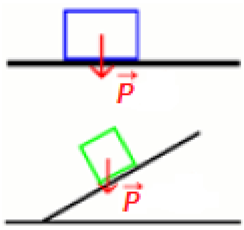
Las **fuerzas de acción y de reacción** no se anulan a pesar de ser iguales y de sentido contrario porque actúan sobre cuerpos distintos. Por lo tanto, las fuerzas siempre van por parejas.

3. FUERZAS DE ESPECIAL INTERÉS.

Las *fuerzas* están presentes en muchas de las situaciones cotidianas. A continuación señalaremos algunas de ellas debido a su importancia.

3.1. PESO DE UN CUERPO.

Todos los cuerpos que se encuentran en la superficie de la Tierra o cerca de ella están sometidos a la *fuerza de atracción gravitatoria* de ésta. Esta fuerza se conoce con el nombre de **peso** y se representa con la letra **P**.



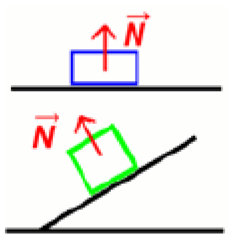
Cuando se deja caer un cuerpo este se ve sometido a la *fuerza de atracción gravitatoria* describiendo un MUA. La aceleración de este movimiento se llama **aceleración de la gravedad** y se representa con la letra **g** y tiene un valor constante en la superficie de la Tierra de **9,8 m/s^2**.

Puesto que el *peso* es una fuerza podemos calcular su *módulo* mediante la siguiente expresión:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}\ (N)$$

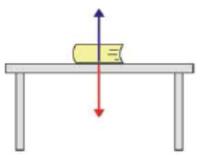
Su *dirección* y *sentido* es hacia el centro de la tierra.

3.2. FUERZA NORMAL.



Todos los objetos apoyados sobre una superficie interaccionan mutuamente. Esta fuerza se llama **fuerza normal ($\vec{N}$)**. La *dirección* es perpendicular a la superficie sobre la que se apoya el cuerpo. Como se puede observar, no siempre es vertical, sino que depende de la superficie.

En la siguiente imagen están dibujadas dos fuerzas normales, la que hace el libro sobre la mesa en rojo y la de la mesa sobre el libro en azul. Ambas son iguales en módulo y sentido contrario, pero la resultante no es nula porque se aplican sobre cuerpos diferentes.

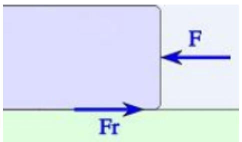


Cuando la superficie sobre la que se apoya el cuerpo es horizontal y el cuerpo está en reposo, sobre el cuerpo actúan dos fuerzas la *fuerza normal N* debida a la superficie sobre el cuerpo y el *peso P* que es la fuerza que ejerce la Tierra sobre él. Solo en este caso, **N = P → N = m ·g**.

3.3. FUERZA DE ROZAMIENTO.

La **fuerza de rozamiento** es una fuerza que aparece cuando hay dos cuerpos en contacto y es una fuerza muy importante cuando se estudia el movimiento de los cuerpos.

La dirección de la *fuerza de rozamiento* es la misma que la del movimiento, pero el sentido es el contrario, es decir, siempre se opone al movimiento.



Existe *rozamiento* incluso cuando no hay movimiento entre los dos cuerpos que están en contacto. Por ejemplo, si queremos empujar un armario muy grande y hacemos una fuerza pequeña, el armario no se moverá. La *fuerza de rozamiento* es menor un vez vencido el rozamiento inicial, cuando el cuerpo ya se mueve.

La *fuerza de rozamiento* entre dos cuerpos no depende del tamaño de la superficie de contacto entre los dos cuerpos, pero sí depende de las características de esa superficie de contacto (material, rugosidad, etc.).

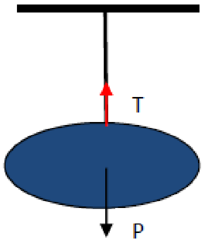
La magnitud de la **fuerza de rozamiento** entre dos cuerpos en contacto es proporcional a la *fuerza normal* entre los dos cuerpos, es decir:

$$F_r = \mu \cdot N$$

Donde μ es lo que conocemos como **coeficiente de rozamiento**. Su valor está entre 0 y 1.

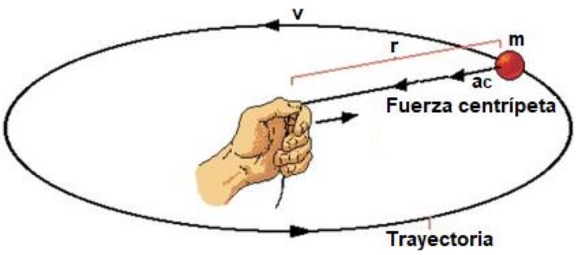
3.4. FUERZA DE TENSIÓN.

Cuando un cuerpo está sujeto con una cuerda, la fuerza que realiza la cuerda sobre el cuerpo se llama **tensión**, **T**. En este caso, la *tensión* es igual al *peso*.



3.5. FUERZA CENTRÍPETA.

Es la fuerza resultante que se provoca por la acción de la *aceleración centrípeta* en un *movimiento circular uniforme*. La **fuerza centrípeta (F_C)** tiene la misma *dirección* y *sentido* que la **aceleración centrípeta (a_C)**.



Su valor o *módulo* se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

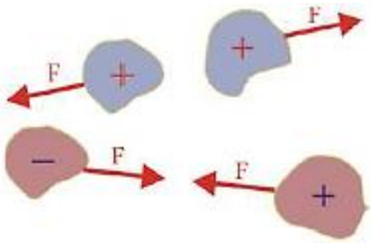
3.6. FUERZAS GRAVITATORIAS.

La **fuerza gravitatoria** es la *fuerza de atracción* que se ejercen mutuamente dos cuerpos y que afecta a todos los cuerpos. *Isaac Newton* fue el primero en plantear que debido a la fuerza gravitacional los cuerpos en las cercanías de la Tierra caen con aceleración constante (**aceleración**

de la gravedad) hacia esta y, además, está fuerza mantiene en movimiento a los planetas alrededor del sol. Estudiaremos con más detalle estas fuerzas más adelante.

3.7. FUERZAS ELÉCTRICAS.

Son las fuerzas que se manifiestan entre dos cuerpos con *carga eléctrica*. Las **fuerzas eléctricas** entre cargas de igual signo son de **repulsión** y entre cargas de distinto signo son de **atracción**.

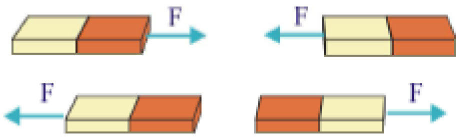


La fórmula para calcular la fuerza con la que se atraen o repelen dos *cargas eléctricas* es semejante a la de las *fuerzas gravitatorias*.

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{d^2}$$

3.8. FUERZAS MAGNÉTICAS.

Las **fuerzas magnéticas** son producidas por *imanes naturales* o *electroimanes*, que actúan atrayendo objetos hechos con hierro y unos pocos materiales más (cobalto, níquel y sus aleaciones).



Los **imanes** siempre tienen dos **polos**, llamados **polo norte** y **polo sur**. Los *polos* distintos se atraen entre sí, y los polos iguales se repelen. Las *fuerzas magnéticas* disminuyen al alejar los imanes o el imán. Si un imán se rompe, los dos trozos resultantes tienen, cada uno de ellos, sus polos norte y sur.

El *magnetismo* es producido por cargas eléctricas en movimiento, es decir, por corrientes eléctricas. En los **imanes naturales** estas corrientes son debidas al movimiento organizado de los electrones.

4. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

Interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna

Su expresión fue formulada por primera vez por *Isaac Newton*. La **Ley de Gravitación Universal** dice que: “*dos cuerpos de masas M y m separados una distancia d, se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa*”.

Suponiendo dos cuerpos uno de masa **M** y otro de masa **m**, separados una distancia **d**, la *Ley de Gravitación* de Newton dice que se atraen ambos cuerpos con una fuerza dada por la expresión:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

Donde **G** se denomina **constante de gravitación universal** y su valor es siempre el mismo. En el S.I. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$. Como vemos, su valor es pequeñísimo, por eso la atracción entre cuerpos de masas normales es imperceptible.

Todos los cuerpos del universo se atraen entre ellos mediante **fuerzas gravitatorias**, de ahí que se muevan de forma ordenada. La *línea de atracción* es la que une los puntos de ambas masas.

Ejemplo: Calcula el valor de las fuerzas de atracción gravitatoria entre los dos cuerpos, uno de masa *40 kg* y otro de *10 kg* separados a una distancia de *2 m*.

$$\boldsymbol{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{40 \cdot 10}{2^2} = \boldsymbol{6{,}67 \cdot 10^{-9}\ N}$$

Como puede verse, para objetos de poca masa esta fuerza es muy pequeña.

4.1. INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE.

Ya sabemos que la Tierra atrae a todos los cuerpos que están alrededor de ella. Se llama **intensidad del campo gravitatorio terrestre ($\vec{g}$)** a la *fuerza gravitatoria ($\overrightarrow{F_g}$)* con que la Tierra atrae a cada *unidad de masa (m)* situada sobre la superficie terrestre.

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\overrightarrow{F_g}}{m} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d_T^2}}{m} = \boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M_T}}{\boldsymbol{d_T^2}}$$

Donde M_T es la *masa de la Tierra* y d_T la *distancia* al centro terrestre. La *intensidad del campo gravitatorio terrestre* se mide en **N/kg** o en **m/s²**. El sentido de la *intensidad del campo gravitatorio terrestre* es hacia el centro de la Tierra.

El valor de **g** equivale también a la aceleración con la que caen libremente los cuerpos (**aceleración de la gravedad**) en el *campo de fuerza gravitacional*.

5. FUERZA Y PRESIÓN EN LOS FLUIDOS.

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo deformable, se observa experimentalmente que las consecuencias de la misma dependen de dos factores: la *intensidad de la fuerza* y la *superficie* sobre la que esta actúa. Esta doble dependencia lleva a la introducción de una nueva magnitud: la *presión*.

La **presión (p)** ejercida por una **fuerza (F)** sobre una **superficie (S)** es directamente proporcional al módulo de la fuerza e inversamente proporcional a la superficie sobre la que actúa.

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{S}}$$

Cuanta más pequeña es la *superficie* sobre la que actúa la *fuerza*, mayor será la *presión* ejercida.

La *presión* es una magnitud escalar. Su unidad de medida en el S.I. es el **Pascal (Pa)**. Un *Pascal* es la cantidad de presión que ejerce una fuerza de *1 N* sobre una superficie de *1* m^2: *Pa = 1* N/m^2.

Hay muchas otras unidades de presión que no son del S.I. Damos aquí las equivalencias.

1 kp/cm^2 *= 98000 Pa*; *1* Kp/m^2 *= 9,8 Pa*; *1 atm = 101325 Pa*; *1 bar =* 10^5 *Pa*; *1 bar* $\approx$ *1atm*.

La presión se mide con un aparato que se llama **manómetro.**

Ejemplo: Calcula la presión que ejerce una persona de *65 Kg* que está de pie sobre el suelo, sabiendo que la suela de cada uno de sus zapatos tiene un área de *520* cm^2.

La superficie de los dos zapatos es $2 \cdot 520\ cm^2 = 1040\ cm^2$. Con lo que $1040\ cm^2 = 0{,}104\ m^2$.

$$\boldsymbol{p} = \frac{F}{S} = \frac{P}{S} = \frac{65 \cdot 9{,}8}{0{,}104} = \boldsymbol{6{,}12\ Pa}$$

5.1. PRESIÓN EN LOS LÍQUIDOS.

Todos los líquidos pesan, por ello cuando están contenidos en un recipiente las capas inferiores soportan más peso que las superiores y, por tanto, más presión. La *presión* en un punto determinado del líquido deberá depender entonces de la *altura* de la columna de líquido que tenga por encima.

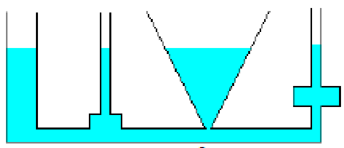
El **Teorema Fundamental de la Hidrostática** nos dice: "*La presión que existe en un punto interior de un líquido es directamente proporcional a la densidad de dicho líquido y a la altura a la que se encuentra dicho punto respecto a la superficie libre*". Matemáticamente se expresa:

$$\boldsymbol{p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{d \cdot V \cdot g}{S} = \frac{d \cdot S \cdot h \cdot g}{S} = d \cdot h \cdot g}$$

Donde *p* es la *presión* expresada en *Pascales*, *d* es la densidad del líquido expresada en *kg/m*^{3}, *g* es la *aceleración de la gravedad* y *h* la *distancia* desde la superficie expresada en *m*.

Consecuencias de este Principio:

- La presión de un líquido es mayor cuanto mayor sea su densidad.
- La presión en el seno de un líquido aumenta con la profundidad.
- Todos los puntos del interior de un líquido situados a la misma profundidad están sometidos a la misma presión.
- Todos los puntos de la superficie libre de un líquido en reposo forman una horizontal plana ya que todos están sometidos a la misma presión (la **presión atmosférica**).
- En un sistema de *vasos comunicantes*, el líquido se encuentra al mismo nivel puesto que la presión ejercida sólo depende de la altura y no de la cantidad de líquido contenido en cada uno de los recipientes.


Vasos comunicantes

Ejemplo: La densidad del agua del mar es aproximadamente *1030 kg/m*^{3}. Calcule la presión que soporta un submarino que está a una profundidad de *150 m*.

$$\boldsymbol{p} = d \cdot h \cdot g = 1030 \cdot 150 \cdot 9{,}8 = \boldsymbol{1514100\ Pa = 14{,}94\ atm}$$

5.2. PRESIÓN EN LOS GASES. PRESIÓN ATMOSFÉRICA.

Los gases presentan diferencias fundamentales con los líquidos: su volumen no es constante, sino que depende del volumen del recipiente que los contiene y tampoco es constante su densidad, sino que ésta dependerá del grado de compresión que posea el gas en el recipiente.

Aunque normalmente no somos conscientes de ello, el aire que nos rodea pesa.

La **presión atmosférica** es la *presión* que ejerce el peso del aire sobre los cuerpos o superficies de la Tierra. La *presión atmosférica* en un punto es igual al peso de la columna de aire existente encima de ese punto.

Los factores que modifican la *presión atmosférica* son varios: la *altura*, la *temperatura* y la *humedad*.

- **Altura**: a mayor altura existe una menor *presión atmosférica*. Esto se explica porque a mayor altura el aire es menos denso. Por tanto, pesa menos y ejerce menor presión.

- **La humedad**: depende de la cantidad de *vapor de agua* que existe en la atmósfera. Si hay más humedad, la *presión atmosférica* es mayor (la columna de aire pesa más, luego ejerce más presión).
- **Temperatura**: el aire caliente es menos denso. Cuando el aire se calienta, asciende, provocando una disminución en la *presión atmosférica*. Este fenómeno provoca zonas de la atmósfera con mayor presión y otras de menor, generándose movimientos de aire: *los vientos*.

En el S.I. la *presión* se mide en *Pascales*. Debido a que el *Pascal* es una unidad muy pequeña, para medir la *presión atmosférica*, se ha optado por el **milibar (mb)**. Otra unidad muy utilizada es la **atmósfera (atm)**. Equivalencias: *1 mb = 100 Pa; 1 atm = 101325 Pa*. La **presión atmosférica estándar** es de *1013,25 mb*. La *presión atmosférica* se mide con el **barómetro**.

RESUMEN DEL TEMA 8

1. LAS FUERZAS.

La **Física** es la parte de la ciencia que estudia los *fenómenos físicos*: los describe, los analiza y descubre las leyes que los rigen.

En física, la **fuerza** es un *fenómeno físico* capaz de modificar la velocidad de movimiento y/o la estructura (deformación) de un cuerpo. Es decir, es aquella acción o influencia que deforma o cambia el movimiento de un cuerpo.

La **Dinámica** es la parte de la *Física* que estudia el movimiento teniendo en cuenta las causas que lo producen, a través de las tres *leyes de Newton*.

1.1. CONCEPTO DE FUERZA.

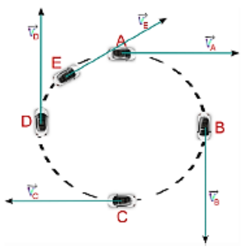
Denominamos **fuerza** a toda causa capaz de producir una *deformación* o *cambiar el estado* de reposo o de movimiento de un cuerpo.

La *fuerza* es una *magnitud física*, es decir, se puede medir. Su unidad en el S.I. es el **newton (N)**. Un *newton* equivale a la fuerza que hay que aplicar a un cuerpo que tiene una masa de *1 kg* para comunicarle una aceleración de $1\ m/s^2$. Otra unidad de medida muy utilizada es el **Kilopondio (kp)**, unidad de medida del Sistema Técnico, siendo **1 kp = 9,8 N**.

Para medir las *fuerzas* se utiliza el **dinamómetro**. Éste se fundamenta en que el alargamiento que se produce en un muelle es proporcional al peso colocado en el mismo.

Las *fuerzas* pueden producir varios efectos sobre los cuerpos:

- **Deformar un cuerpo**. Una fuerza puede cambiar la forma o el tamaño de un cuerpo. <u>Ejemplo</u>: Estirando una goma.
- **Cambiar la velocidad de un cuerpo**. Una fuerza puede modificar la velocidad de un móvil de tres formas:

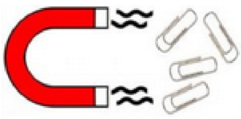


  - **Cambiando el valor numérico de la velocidad**: es decir, haciendo que el cuerpo vaya más rápido o más lento. <u>Ejemplo</u>: aumentando la velocidad de un coche o deteniendo un balón.
  - **Cambiando la dirección de la velocidad**: es decir, modificando su trayectoria. <u>Ejemplo</u>: la que ejercemos sobre el volante del coche para que éste gire.
  - **Cambiando el sentido del movimiento**: <u>Ejemplo</u>: como cuando una pelota rebota contra una pared o cuando la golpeamos con una raqueta.

Las *fuerzas* pueden actuar por **contacto** o **a distancia**.

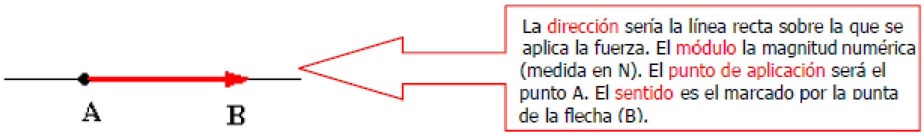
- **Fuerza de contacto**: aquella en la que el cuerpo que ejerce la fuerza está en contacto directo con el cuerpo sobre el que se aplica dicha fuerza. <u>Ejemplos</u>: dar una patada a un balón, moldear plastilina, etc.

- **Fuerza a distancia**: aquellas en la que no existe contacto directo entre el cuerpo que ejerce la fuerza y el cuerpo sobre el que se aplica. Ejemplos: fuerza de la gravedad, fuerza magnética, fuerzas eléctricas, etc.



1.2. CARÁCTER VECTORIAL DE LA FUERZA.

Una **fuerza** es una **magnitud vectorial** y la describiremos por un **vector**. Por tanto, para que una fuerza quede perfectamente definida, debemos conocer su



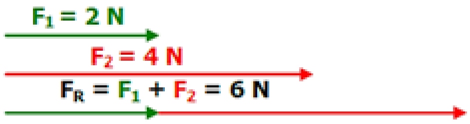
punto de aplicación, su *módulo* (valor numérico), su *dirección* y su *sentido*.

1.2.1. SUMA DE FUERZAS.

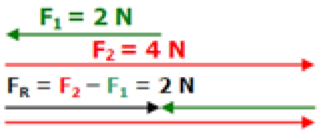
Las *magnitudes vectoriales* no se suman de la misma forma que las *escalares* puesto que, además del valor numérico (el *módulo*), poseen *dirección* y sentido.

Normalmente sobre un cuerpo actúa siempre más de una fuerza, estas forman el **sistema de fuerzas**. A la *fuerza* que produce el mismo efecto que todas ellas se le llama **fuerza resultante**.

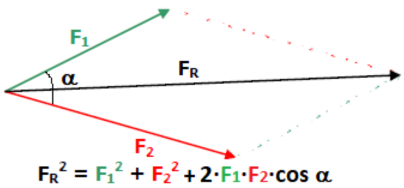
- **Suma de fuerzas con la misma dirección y sentido**. Si dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ actúan sobre un cuerpo en la misma dirección y sentido, la **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ tendrá la misma dirección y sentido que ellas y su módulo será la suma de los módulos.



- **Suma de fuerzas con la misma dirección y sentido contrario**. En este caso la **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ tendrá la misma dirección de las fuerzas componentes, el sentido de la mayor de ellas y el módulo será la diferencia de los módulos.

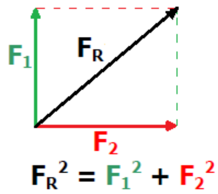


- **Suma de fuerzas con diferentes direcciones**. Se aplica el *método gráfico del paralelogramo*. La **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ será la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas componentes. El *módulo* de la *fuerza resultante* se calcula mediante la fórmula indicada o bien gráficamente dibujando las fuerzas a escala.

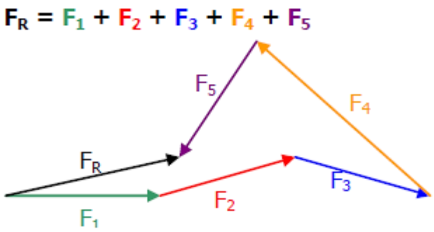


Si sumamos dos *vectores perpendiculares*, podemos calcular el *módulo* de la *fuerza resultante* usando el teorema de Pitágoras:

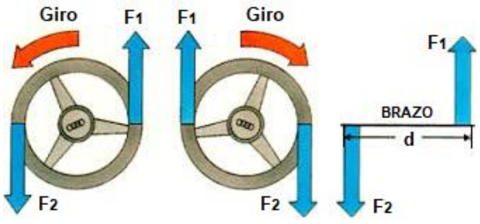
$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$



- **Resultante de varias fuerzas de diferente dirección**. Aplicamos el *método del polígono*. Colocamos el punto de aplicación de cada fuerza sobre el extremo de la anterior. La **fuerza resultante** $\mathbf{F_R}$ se obtiene gráficamente uniendo el punto de aplicación de la primera fuerza con el extremo de la última. El *módulo* de la *fuerza resultante* no es la suma de los módulos.



1.2.2. PAR DE FUERZAS.



Un **par de fuerzas** es un sistema formado por dos fuerzas paralelas entre sí, de igual módulo y de sentidos contrarios, que produce un **movimiento de rotación** o **giro**. La magnitud de la rotación depende del valor de las fuerzas que forman el *par* y de la *distancia* entre ambas, llamada **brazo del par**.

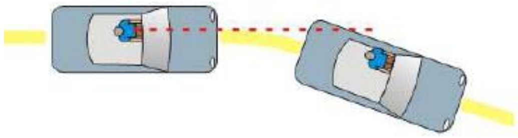
Los **momentos** que producen cada una de las fuerzas del *par*, son los causantes del giro. El **momento** de un *par de fuerzas*, **M**, es una *magnitud vectorial* que tiene por módulo el producto de cualquiera de las *fuerzas* por la distancia (perpendicular) entre ellas, *d*. Esto es:

$$\boldsymbol{M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d}$$

2. LEYES DE NEWTON.

2.1. PRIMERA LEY DE NEWTON. LEY DE LA INERCIA

La **primera ley de Newton** nos dice que "*todo cuerpo permanece en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la fuerza resultante que actúa sobre él es nula*".



La tendencia natural que tienen los cuerpos a seguir parados o a seguir moviéndose en línea recta y velocidad constante se llama **inercia**.

2.2. SEGUNDA LEY DE NEWTON. LEY DE LA DINÁMICA.

La **segunda ley de Newton** nos dice que "*la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa*".

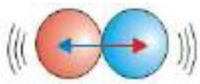
$$\boldsymbol{\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

La *aceleración* del cuerpo tendrá la misma dirección y el mismo sentido que la *fuerza resultante*.

2.3. TERCERA LEY DE NEWTON. PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN.

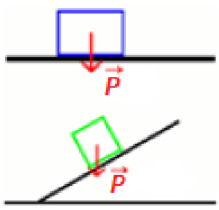
La **tercera ley de Newton** nos dice que "si un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro, este produce otra fuerza de la misma intensidad (reacción), pero opuesta, sobre el primero.

Las **fuerzas de acción y de reacción** no se anulan a pesar de ser iguales y de sentido contrario, porque actúan sobre cuerpos distintos. Por lo tanto, las fuerzas siempre van por parejas.

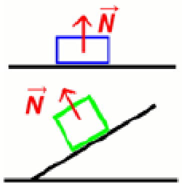


3. FUERZAS DE ESPECIAL INTERÉS.

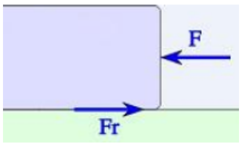
- **Peso de un cuerpo**: Fuerza con la que la Tierra atrae a un objeto que se encuentra en sus proximidades. El **peso de un cuerpo ($\vec{P}$)** es la fuerza con la que es atraído por la Tierra. El peso de un cuerpo, depende de su **masa** y de la **aceleración de la gravedad**. Su módulo vale: **P = m · g**. Teniendo **g** en la superficie de la Tierra tiene un valor de **9,8 m/s²**.



- **Fuerza normal**: Es la que ejerce una superficie sobre un cuerpo que se apoya sobre ella. Las **fuerza normal ($\vec{N}$)** es siempre perpendicular a la superficie de los cuerpos en el punto de contacto. En el caso de superficies horizontales, su valor es: **N = P**.



- **Fuerza de rozamiento**: Fuerza que se opone al movimiento de los cuerpos, debido a la fricción entre las superficies del objeto que está en movimiento y de los objetos sobre los que se mueve. Su valor es igual a: $\mathbf{F_r = \mu \cdot N}$. Donde μ es lo que conocemos como **coeficiente de rozamiento**.



- **Fuerza centrípeta**: Es la que experimentan los cuerpos que se mueven describiendo un *movimiento circular* hacia el centro de la circunferencia descrita en su movimiento. Su valor es igual a: $\mathbf{F_C = m \cdot v^2/r}$. La **fuerza centrípeta (F_C)** tiene la misma dirección y sentido que la **aceleración centrípeta (a_C)**.
- **Fuerza de tensión (T)**: Fuerza que ejerce una cuerda sobre un objeto cuando a un extremo de ella se encuentra atado un objeto.
- **Fuerzas gravitatorias**: *Isaac Newton* descubrió que dos cuerpos cualesquiera, por el simple hecho de tener masa, se atraen mutuamente entre ellos. Estas *fuerzas de atracción* (nunca son de repulsión) se llaman **fuerzas gravitatorias**. Estudiaremos con más detalle estas fuerzas más adelante.
- **Fuerzas eléctricas**: Son las fuerzas que se manifiestan entre dos cuerpos con carga eléctrica. Las *fuerzas eléctricas* entre cargas de igual signo son de repulsión y entre cargas de distinto signo son de atracción.
- **Fuerzas magnéticas**: Las *fuerzas magnéticas* son las producidas por *imanes naturales* o *electroimanes*, que actúan atrayendo objetos hechos con hierro y unos pocos materiales más (cobalto, níquel y sus aleaciones). Los imanes siempre tienen dos *polos*, llamados polo norte y polo sur. Los *polos* distintos se atraen entre sí, y los polos iguales se repelen.

4. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

La **Ley de Gravitación Universal** dice que: "*dos cuerpos de masas M y m separados una distancia d, se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa*". Su expresión matemática:

Interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna

$$\boldsymbol{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}}$$

Donde **G** se denomina **constante de gravitación universal** y su valor es siempre el mismo. En el S.I. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$. Su valor es pequeñísimo, por eso la atracción entre cuerpos de masas normales es imperceptible.

Todos los cuerpos del universo se atraen entre ellos mediante **fuerzas gravitatorias**, de ahí que se muevan de forma ordenada. La *línea de atracción* es la que une los puntos de ambas masas.

4.1. INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE.

Se llama **intensidad del campo gravitatorio terrestre ($\vec{g}$)** a la *fuerza gravitatoria ($\vec{F_g}$)* con que la Tierra atrae a cada *unidad de masa (m)* situada sobre la superficie terrestre.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m} = \frac{G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d_T^2}}{m} = \boldsymbol{G \cdot \frac{M_T}{d_T^2}}$$

Donde M_T es la *masa de la Tierra* y d_T la *distancia* al centro terrestre. La *intensidad del campo gravitatorio terrestre* se mide en **N/kg** o en **m/s²**. El sentido de la *intensidad del campo gravitatorio terrestre* (aceleración gravitatoria) es hacia el centro de la Tierra. El valor de **g** equivale también al valor de la **aceleración de la gravedad**.

5. FUERZA Y PRESIÓN EN LOS FLUIDOS.

El *efecto* que produce una *fuerza* en el objeto sobre el que se ejerce depende, no sólo de la *intensidad de la fuerza*, sino también de la *superficie* de contacto con dicho cuerpo.

La **presión (p)** es la **fuerza** ejercida por un cuerpo sobre una **unidad de superficie**. La calculamos dividiendo la *fuerza* por la *superficie* sobre la que se ejerce dicha fuerza:

$$\boldsymbol{p = \frac{F}{S}}$$

Su unidad de medida en el S.I. es el **Pascal (Pa)**. Un *Pascal* es la cantidad de presión que ejerce una fuerza de *1 N* sobre una superficie de *1* m^2: $Pa = 1\ N/m^2$.

Equivalencias con otras unidades de presión que no son del S.I.

$1\ kp/cm^2 = 98000\ Pa$; $1\ Kp/m^2 = 9{,}8\ Pa$; $1\ atm = 101325\ Pa$; $1\ bar = 10^5\ Pa$; $1\ bar \approx 1 atm$.

5.1. PRESIÓN EN LOS LÍQUIDOS.

La **presión** que existe en un punto interior de un líquido es directamente proporcional a la **densidad** de dicho líquido y a la **altura** a la que se encuentra dicho punto respecto a la superficie.

$$\boldsymbol{p = d \cdot h \cdot g}$$

Donde *P* es la *presión* expresada en *Pascales*, *d* es la densidad del líquido expresada en kg/m^3, *g* es la *aceleración de la gravedad* y *h* la *distancia* desde la superficie expresada en *m*.

Cuanto mayor sea la profundidad y la densidad, mayor será la presión ejercida.

5.2. PRESIÓN EN LOS GASES. PRESIÓN ATMOSFÉRICA.

La **presión atmosférica** es la *presión* que ejerce el peso del aire sobre los cuerpos o superficies de la Tierra. La *presión atmosférica* en un punto es igual al peso de la columna de aire existente encima de ese punto.

Los factores que modifican la *presión atmosférica* son varios: la **altura**, la **temperatura** y la **humedad**.

A mayor *altura*, la *presión atmosférica* es menor. A mayor *humedad*, mayor *presión atmosférica*. A mayor *temperatura*, menor *presión atmosférica*.

La **presión atmosférica** se mide en **milibares (mb)**. Otra unidad muy utilizada es la **atmósfera (atm)**. Equivalencias: *1 mb = 100 Pa*; *1 atm = 101325 Pa*.

La **presión atmosférica estándar** es de *1013,25 mb*. La *presión atmosférica* se mide con el **barómetro**.

ACTIVIDADES DEL TEMA 8: “CINEMÁTICA. FUERZAS DE INTERÉS”.

1. Indica en qué casos de los siguientes, podemos asegurar que actúa alguna fuerza.

▪ Una moto aumenta la velocidad de 50 km/h a 70 km/h.	▪ Una piedra cae después de soltarla en el aire.
▪ Comprimimos un resorte.	▪ La Luna da vueltas alrededor de la Tierra.
▪ Un coche coge una curva a 45 km/h.	▪ Doblamos una chapa de aluminio.

2. Representa dos fuerzas con el mismo origen, que sean perpendiculares, una de 2N y otra de 4 N.

a) Calcula la fuerza resultante por el método del paralelogramo.

b) Calcula el módulo de la resultante.

3. Relaciona cada masa con su peso.

29,4 N	Un camión de 20 toneladas
4,9 N	Un ordenador portátil de 3 kg de masa
196000 N	500 g de garbanzos
882 N	Unas pesas de halterofilia de 90 kg

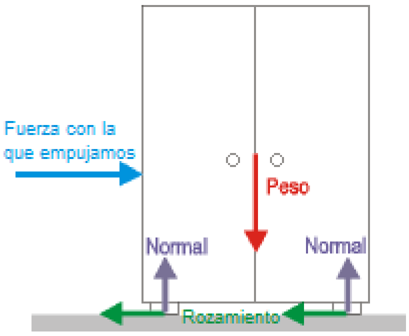
4. El armario de la figura tiene una masa de 90 kg, y el coeficiente de rozamiento entre la patas y el suelo es de 0,26.

a) Calcula el peso del armario.

b) Calcula el valor de la fuerza normal entre las patas y el suelo.

c) Calcula el valor de la fuerza de rozamiento.

d) ¿Con cuánta fuerza tendremos que empujar nosotros el armario si queremos que empiece a moverse?



5. Compramos una lámpara de 25 kg de masa y para colgarla usamos un cable que aguanta un máximo de 300 N. ¿Se caerá la lámpara? ¿Sabrías decir qué tensión soportará el cable cuando esté colgada del techo?

6. Indica, justificando por qué, si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto puede estar moviéndose y ser cero la fuerza total que actúa sobre él.
b) Sobre un cuerpo pueden estar actuando dos fuerzas y estar parado.
c) La fuerza de rozamiento no depende de la masa de los cuerpos.
d) Un objeto sobre el que no actúa ninguna fuerza, se mueve aceleradamente.
e) Las fuerzas de acción y reacción se anulan porque son iguales y de sentido contrario.

7. **Halla la aceleración que experimenta un bloque de 500 g de masa apoyado en una superficie horizontal al aplicarle una fuerza de 9 N.**

8. **Una fuerza de frenada actúa sobre un coche de 800 kg haciendo pasar su velocidad de 90 Km/h a 18 Km/h en 20 s. ¿Cuánto vale la fuerza?**

9. **Una masa de 800 Kg y otra de 500 Kg se encuentran separadas por 3 m, ¿Cuál es la fuerza de atracción que experimentan las masas?** Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$.

10. **Con un martillo ejercemos una presión de 30000 Pa sobre un clavo que tiene una superficie de apoyo sobre la madera de 1 mm^2. ¿Cuánta fuerza hace el clavo contra la madera?**

11. **¿Cuál es la presión hidrostática que experimenta un cuerpo sumergido en una piscina llena de agua a una profundidad de 2 metros? Ten en cuenta que la densidad del agua es de 1000 kg/m^3 y la aceleración de la gravedad (g) tiene un valor de 9,8 N/kg.**

SOLUCIONES

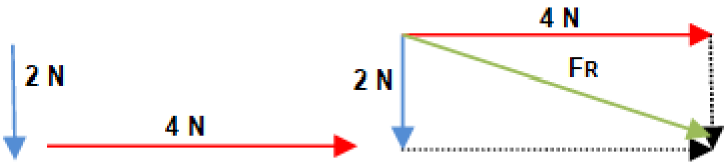
1. Soluciones:

▪ Una moto aumenta la velocidad de 50 km/h a 70 km/h.	*Hay fuerza sobre la moto ya que su velocidad aumenta. Si no hubiese fuerza la velocidad no podría aumentar.*
▪ Comprimimos un resorte.	*Actúa fuerza sobre el resorte porque se deforma.*
▪ Un coche coge una curva a 45 km/h.	*A pesar de no cambiar el módulo de la velocidad (45 km/h), la dirección del movimiento sí cambia porque la trayectoria es curva. Entonces actúa alguna fuerza sobre el coche.*
▪ Una piedra cae después de soltarla en el aire.	*La pelota cae cada vez más rápido porque la Tierra tira de ella hacia abajo: hay una fuerza actuando sobre la pelota.*
▪ La Luna da vueltas alrededor de la Tierra.	*La trayectoria de la Luna es curvilínea, entonces el planeta Tierra tiene que ejercer alguna fuerza sobre la Luna. Si la Tierra no la ejerciese, la Luna se movería en línea recta.*
▪ Doblamos una chapa de aluminio.	*Ejercemos una fuerza, ya que el aluminio se deforma.*

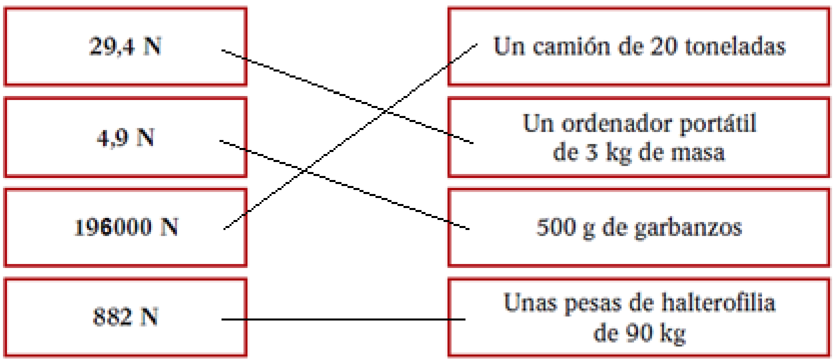
2. Soluciones:

a) El vector de la *fuerza resultante*, F_R, es el de color verde.

b) Para calcular el módulo de la fuerza resultante aplicamos el teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{F_R} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \mathbf{4,47}\ \boldsymbol{N}$.



3. Solución:



4. Soluciones:

Datos: *m = 90 Kg*; *μ = 0,26*.

a) Peso del armario → ***P*** = *m ·g = 90 ·9,8 =* ***882 N***.

b) La fuerza normal tiene que ser igual al peso del armario → ***N = 882 N***.

c) La fuerza de rozamiento será: $\boldsymbol{F_r}$ = *μ ·N = 0,26 ·882 =* ***229,32 N***.

d) Para que el armario comience a moverse tenemos que empujarlo con una fuerza igual o mayor que la fuerza de rozamiento, es decir, *229,32 N*.

5. Solución:

No se caerá. El cable aguanta 300 N, es decir, el peso de más de 30 kg de masa. Si colgamos una lámpara de 25 kg, la tensión de la cuerda será la misma que el peso que soporte, 245 N.

T = P = m·g = 25 ·9,8 = 245 N.

6. **Soluciones:**
   a) Verdadera, en este caso el movimiento es MRU.
   b) Verdadera, la resultante es cero y si estaba parado continuara parado.
   c) Falsa, la fuerza de rozamiento depende de la masa del cuerpo ($Fr = \mu \cdot N$).
   d) Falsa, para haya aceleración tiene que estar actuando una fuerza.
   e) Falsa, no se anulan porque actúan sobre cuerpos distintos.
7. **Solución:**

   $F = m \cdot a \rightarrow \mathbf{a} = F/m = 9/0,5 = \mathbf{18\ m/s^2}$.
8. **Solución:**

   Datos: $m = 800\ Kg$; $v_0 = 90\ Km/h = 25\ m/s$; $v = 18\ Km/h = 5\ m/s$; $t = 20\ s$.

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{5 - 25}{20} = -1\ m/s^2.$$

$$\boldsymbol{F} = m \cdot a = 800 \cdot (-1) = \mathbf{-800}\ \boldsymbol{N}$$

   El signo negativo se debe a que estamos frenando y la fuerza actúa en contra del movimiento.
9. **Solución:**

   Datos: $m_1 = 800\ Kg$; $m_2 = 500\ Kg$; $d = 3\ m$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$.

$$\boldsymbol{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{800 \cdot 500}{3^2} = \mathbf{2,96 \cdot 10^{-6}}\ \boldsymbol{N}.$$

10. **Solución:**

    $1\ mm^2 = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2$.

$$p = \frac{F}{S} \rightarrow \boldsymbol{F} = p \cdot S = 30000 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = \mathbf{0,03}\ \boldsymbol{N}.$$

11. **Solución:**

$$\boldsymbol{p} = d \cdot h \cdot g = 1000 \cdot 2 \cdot 9,8 = \mathbf{19600}\ \boldsymbol{Pa}$$

UNIDAD DE APRENDIZAJE Nº 12: TRIGONOMETRÍA. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR.

TEMA 9. TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR.

1. LA ENERGÍA.

La caída de un rayo, planchar una camisa, correr una maratón, un salto de agua en una catarata, hacer una tortilla, golpear un balón, la explosión de una bomba atómica, son todas ellas situaciones en las que la *energía* se pone de manifiesto en alguna de sus formas.

La importancia de la *energía* es evidente, por ello el ser humano ha ido ingeniando inventos y máquinas a lo largo de la historia para su utilización de forma eficiente.

La **energía** es la capacidad que tienen los cuerpos o sistemas para producir cambios en ellos mismos o en otros cuerpos. En Física, la **energía** se define como la capacidad que tienen los cuerpos o sistemas de realizar un *trabajo* o de transferir *calor*. La *energía* se intercambia en forma de **trabajo** o **calor**.

La *energía* es una propiedad de los cuerpos. Los cuerpos presentan *energía* aunque no estén cambiando o sufriendo alguna transformación. La *energía* está presente en todos los fenómenos que ocurren en el Universo.

La unidad de la *energía* en el Sistema Internacional es el **Julio (J)**, que se define como el trabajo realizado por una fuerza de un newton cuando se produce un desplazamiento de un metro en la dirección de la fuerza ($1J = 1\ N \cdot 1m$). Sin embargo, existen otros tipos de unidades más conocidas, y que se utilizan cuando nos referimos a determinados tipos de energía.

Cuando hablamos de *energía calorífica o térmica*, o del valor energético de un alimento, se suele utilizar la **caloría (cal)**, o su múltiplo la **kilocaloría** como unidad (1 kcal = 1000 cal).

La *caloría* es la cantidad de calor necesaria para elevar un grado de temperatura un gramo de agua, a presión atmosférica normal (nivel del mar). Su equivalencia con el julio es: **1 cal = 4,18 J**.

Por otra parte, en el caso del consumo de energía eléctrica de una máquina suele utilizarse el **kilovatio-hora (kWh)**, que es la energía consumida durante una hora por un aparato que tenga una potencia de 1 kilovatio. Su equivalencia con el julio es: **1 KWh = 3600000 J**.

1.1. PROPIEDADES GENERALES DE LA ENERGÍA.

Todos los tipos o formas de **energía** tienen unas propiedades comunes, que se detallan a continuación:

- **Permite producir cambios en los cuerpos**: como el aumento de temperatura de un vaso de leche en el microondas. Los *cambios* pueden ser:
  - *Físicos*: cambios de posición, forma o estado (por ejemplo: elevar un objeto, transportarlo, deformarlo o calentarlo).
  - *Químicos*: unas sustancias se transforman en otras (por ejemplo: quemar un trozo de madera o la descomposición de agua mediante la corriente eléctrica).
  - *Geológicos*: la formación de montañas y la erupción de los volcanes.

- *Biológicos*: los que tienen lugar en el transcurso de la vida de los organismos.

- **Puede ser transformada de una a otra**: como la energía solar que se transforma en energía calorífica en las placas solares.
- **Puede ser transferida de uno a otro cuerpo**.
  - Realizando trabajo cuando existe una fuerza que produce un desplazamiento.
  - En forma de calor cuando dos cuerpos están a distinta temperatura o se está produciendo un cambio de estado.
- **Puede ser almacenada**: el combustible que tenemos en el depósito del coche tiene energía química almacenada y la batería de ese mismo coche tiene energía eléctrica acumulada. Por tanto, la energía se puede guardar o almacenar para ser usada posteriormente.

1.2. TIPOS O FORMAS DE ENERGÍA.

Los principales tipos o formas en que se presenta la energía son las siguientes: *energía cinética, energía potencial gravitacional, energía potencial elástica, energía térmica o calorífica, energía química, energía eléctrica, energía nuclear y energía radiante (luminosa)*.

Energía cinética

La energía cinética es la que tiene un cuerpo por el hecho de estar en movimiento. Depende de la masa del cuerpo y de su velocidad. Todos sabemos que, para una misma masa, cuanta mayor velocidad tiene el objeto, mayor *energía cinética* posee.

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$$

donde *m* = masa del cuerpo que se mueve y *v* = velocidad lineal del objeto.

Se mide en *julios (J)*, la masa en *kilogramos (kg)* y la velocidad en *metros por segundo (m/s)*. Esto significa que hemos de cambiar necesariamente de unidades cuando nos den el dato de la velocidad en *kilómetros/hora (Km/h)*, que es la unidad más habitual.

Ejemplo:

Un cuerpo de 5 kg de masa viaja a una velocidad de 36 Km/h. Calcula su energía cinética.

Pasemos a m/s la velocidad: *v = 36 km/h = 36000 m/ 3600 s = 10 m/s*

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = 250\,J$$

Energía potencial

Es la energía que tienen los cuerpos por ocupar una determinada posición. Podemos hablar de *energía potencial gravitatoria* y de *energía potencial elástica*.

- **Energía potencial gravitatoria**. Es la energía de un cuerpo asociada a la altura a la que se encuentra un cuerpo respecto a la superficie de la Tierra.

$$\boldsymbol{E_p = m \cdot g \cdot h}$$

donde *g* = *aceleración de la gravedad* = *9,8 m/s²* y *h* = altura en metros a la que se encuentra el cuerpo.

Cuando un cuerpo gana altura almacena *energía potencial gravitatoria*, esta energía se libera cuando el cuerpo cae o pierde altura. Cuando el cuerpo cae, gana velocidad y la *energía potencial* se transforma en *energía cinética*.

Ejemplo:

Un cuerpo de 3 kg de masa se encuentra a 20 m de altura. ¿Cuál es su energía potencial gravitatoria?

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 3 \cdot 20 \cdot 9{,}8 = 588\, J$$

- **Energía potencial elástica**. Es la energía que se acumula en los cuerpos elásticos (gomas, muelles, resortes, etc.) al ser comprimidos por la acción de una fuerza. Su expresión matemática es:

$$\boldsymbol{E_{px} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2\ ;\ F_x = k \cdot x}$$

donde *k* es una constante característica de cada muelle, que se expresa en *N/m*, y *x* es la longitud que se deforma el muelle, que se expresa en *m*.

Ejemplo:

Un muelle, de longitud 20 cm, se alarga a 28 cm al aplicarle una fuerza de 2 N. ¿Qué energía potencial elástica posee en estas condiciones?

La fuerza que aplicamos para estirar el muelle se puede calcular mediante la siguiente fórmula: $F = k \cdot x \rightarrow k = F / x = 2 / 0{,}08 = 25\ N/m$

$$E_{px} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0{,}08^2 = 0{,}08\, J$$

Energía térmica o calorífica

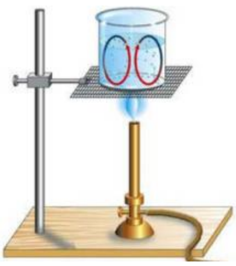
La **energía térmica o calorífica** se debe al movimiento de las partículas que constituyen la materia, de forma que cuanto más rápido es ese movimiento mayor es su energía térmica.

La temperatura de un cuerpo nos da idea del grado de agitación de sus partículas. Un cuerpo a baja temperatura tendrá menos *energía térmica* que si su temperatura fuese mayor.

La transferencia de energía térmica desde un cuerpo a mayor temperatura a otro de menor temperatura, se denomina **calor**. El calor se transmite entre cuerpos que se ponen en contacto, de forma directa o indirecta. Se dice que se alcanza el equilibrio térmico cuando la temperatura de ambos se iguala. Su unidad en el S.I. es la **caloría (cal)**. **1 J = 0,24 cal**.

Existen tres formas de transmitir la *energía térmica o calorífica*:

- **Conducción**. Paso de calor (energía) de un cuerpo de mayor temperatura a uno de menor, por efecto de choques moleculares. Se presenta fundamentalmente en los sólidos. Por ejemplo, un trozo de carne que se cocina en una sartén.



- **Convección**. Es la forma más habitual de propagarse el calor en los fluidos (líquidos y gases). El calor asciende. Para ello es necesario que haya algún fluido que lo transporte (aire, agua, etc.). Ejemplo: el calor del radiador que asciende hasta el techo porque el aire caliente tiene menos densidad.

- **Radiación**. Todos los cuerpos, por estar a una determinada temperatura, emiten radiación, tanto más energética cuanto mayor sea su temperatura. Un cuerpo más caliente que el ambiente que lo rodea irradia calor en forma de ondas que se transmiten a distancia. Ejemplo: el calor del Sol se propaga por radiación.

Energía química

Es la energía liberada en las *reacciones químicas*. Se produce cuando los enlaces atómicos se rompen y estos se combinan formando nuevos productos.

Se producen reacciones químicas cuando el motor del coche quema gasolina. En este caso la energía química del combustible se transforma en energía cinética del coche.

En el interior de nuestro organismo hay una continua utilización de la energía química acumulada en los alimentos, que es transformada en energía metabólica por nuestras células, lo que nos permite vivir.

Energía eléctrica

La **energía eléctrica** es causada por el movimiento de las cargas eléctricas en el interior de los materiales conductores. La *energía eléctrica* se manifiesta como corriente eléctrica, mediante movimiento de electrones en un circuito.

Esta es una de las energías más usada, por varias razones:

- Es fácil de obtener a partir de otras formas de energía.
- Es fácil de transportar a grandes distancias.
- Es fácil de transformar en otros tipos de energía (energía térmica, lumínica, mecánica, magnética, etc.).

La expresión matemática que nos permite calcularla es esta:

$$E_e = P \cdot t = V \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t$$

donde *P = potencia expresada en vatios (W)*, *t = tiempo en segundos*, *V = voltaje en voltios (V)*, *R = resistencia eléctrica en ohmios (Ω)* y *I = intensidad de corriente en amperios (A)*.

Energía nuclear

Es la energía almacenada en el núcleo de los átomos. Esta energía se libera cuando se rompen o se fusionan los núcleos de los átomos. La **fisión nuclear** es un proceso en el que un núcleo de un átomo (uranio o plutonio) se rompe en núcleos más pequeños, liberando neutrones (que rompen otros núcleos) y grandes cantidades de energía. La **fusión nuclear** es un proceso en el que dos átomos pequeños se unen, dando lugar a un átomo más grande con un desprendimiento de gran cantidad de energía. Así obtienen energía las estrellas.

La energía nuclear que aprovechamos los seres humanos se libera mediante reacciones nucleares de fisión provocadas artificialmente en el reactor de una central nuclear.

Albert Einstein demostró que la materia se podía transformar en energía según la fórmula:

$$E = m \cdot c^2$$

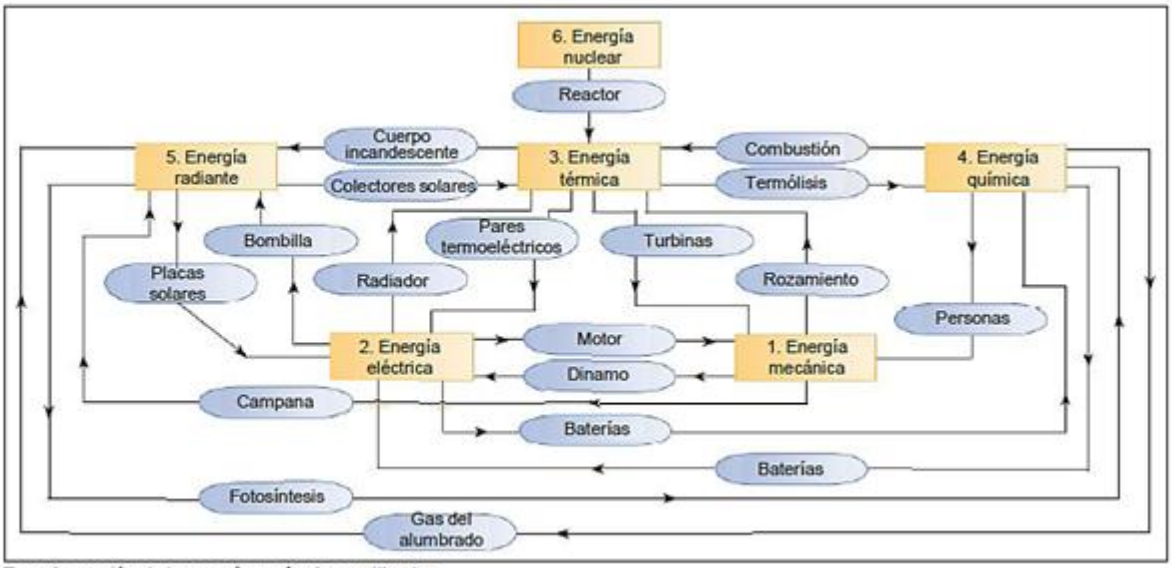
donde *E = energía producida en julios (J)*, *m = masa que desaparece (en kg)* y *c = velocidad de la luz (3 · 10^8 m/s)*.

Energía radiante

La **energía radiante** es aquella que se transmite en forma de ondas. Es la que poseen las *ondas electromagnéticas* como la *luz visible*, u otras ondas electromagnéticas que no son visibles para el ojo humano como las *ondas de radio o televisión*, las *microondas*, los *rayos ultravioleta (UV)*, los *rayos infrarrojos (IR)* o *los rayos X*. El Sol es una fuente inagotable de *energía radiante* gracias a la cual se pueden calentar cuerpos expuestos a su radiación, además de poderla aprovechar para producir electricidad por medio de las *células fotovoltaicas*. La energía que proporciona el Sol nos llega a la Tierra en forma de luz y calor. La característica principal de esta energía es que se puede propagar en el vacío, sin necesidad de soporte material alguno.

1.3. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

Cada una de las formas de energía que hemos visto anteriormente se puede transformar en otras. En cada *transformación de la energía* se cumple siempre el **Principio de conservación de la energía** que dice: "*la energía no se crea ni se destruye, sino que se transforma*". En estas transformaciones, la energía total permanece constante; es decir, la energía total es la misma antes y después de cada transformación. En el siguiente gráfico podemos ver algunos ejemplos de este tipo de **transformaciones energéticas**.



Transformación de la energía y máquinas utilizadas.

En cada **transformación energética**, parte de la energía siempre se convierte en *calor (energía térmica)*, por lo que cada transformación conlleva necesariamente una **degradación de la energía**. Se dice, entonces, que el *calor* es una forma degradada de energía.

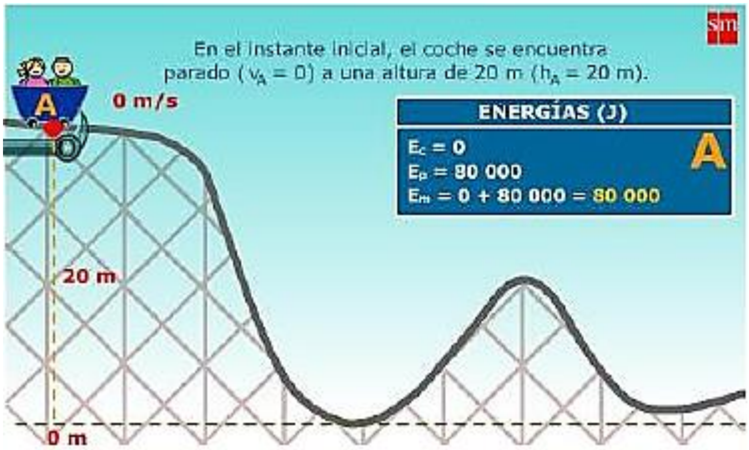
La consecuencia es que las *transformaciones energéticas* nunca se realizan al 100 %, ya que parte de la energía aplicada se "pierde" en forma de calor debido al rozamiento, a choques, a vibraciones, …

1.3.1. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

El *Principio de conservación de la energía* se puede aplicar a cualquier tipo de energía. Aplicaremos este *principio de conservación de la energía* a la *energía mecánica*.

Comprobaremos que si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza externa (rozamiento, etc.), excepto su propio peso, su *energía mecánica* se mantiene constante.

<u>Ejemplo</u>:



Supongamos dos personas montadas en una vagoneta de una montaña rusa (se ha aproximado *g = 10 m/s*^{2})

En el instante inicial (punto A), la vagoneta cuya masa es de 400 kg se encuentra detenida a 20 metros de altura. Su velocidad es cero, por tanto su energía cinética es cero. Su energía potencial será:

$$E_p = m \cdot g.h = 400 \cdot 10 \cdot 20 = 80000\, J$$

Por tanto, la energía mecánica será la suma de las dos:

$$E_m = E_c + E_p = 0 + 80000 = 80000\, J$$

En el punto B la vagoneta pierde altura y gana velocidad. Su energía cinética aumenta mientras que su energía potencial disminuye.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 12{,}65^2 = 32000\, J$$

$$E_p = m \cdot g.h = 400 \cdot 10 \cdot 12 = 48000\, J$$

El valor de la energía mecánica será:

$$E_m = E_c + E_p = 32000 + 48000 = 80000\, J$$

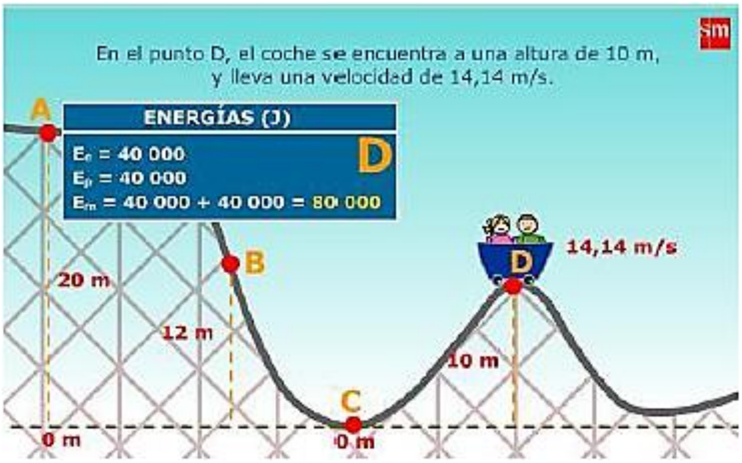
En el punto C la vagoneta se encuentra a nivel del suelo y adquiere su máxima velocidad. Toda la energía potencial que tenía al principio se ha transformado en energía cinética. La energía mecánica sigue teniendo el mismo valor.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 20^2 = 80000\, J$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 0$$

$$E_m = E_c + E_p = 80000 + 0 = 80000\, J$$

Por último, en el punto D la vagoneta comienza a subir al mismo tiempo que pierde velocidad. Gana energía potencial y pierde energía cinética. Pero en todos los casos, la energía mecánica tiene el mismo valor.



$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 14{,}14^2 = 40000\,J$

$E_p = m \cdot g \cdot h = 400 \cdot 10 \cdot 10 = 40000\,J$

$E_m = E_c + E_p = 40000 + 40000 = 80000\,J$

<u>Conclusiones relacionadas con el principio de conservación de la energía mecánica</u>

1. <u>La altura que alcanza un cuerpo cuando se lanza hacia arriba sólo depende de la velocidad de lanzamiento y no de la masa.</u>

   A esta conclusión podemos llegar si se lanza hacia arriba un objeto de masa *m* con una velocidad inicial v_0.

   La E_m en el suelo o desde la posición desde la que lo lanzamos, es la misma que la E_m cuando alcanza altura máxima, con lo que las podemos igualar:

   En el suelo o posición inicial: $h_0 = 0\ m \rightarrow E_p = 0\ J$.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

   Cuando el objeto alcanza su altura máxima: v = 0 m/s → E_c = 0 J

$$E_m = E_{pmáx} = m \cdot g \cdot h_{máx}$$

   Igualando ambas ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h_{máx}$$

   y despejando la altura máxima:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

   Como vemos, la altura que alcanza un cuerpo cuando se lanza hacia arriba sólo depende de la velocidad de lanzamiento y no de la masa.

2. <u>La velocidad con que llega al suelo un cuerpo y el tiempo que tarda en llegar al suelo, sólo depende de la altura desde la cual se suelta y de la velocidad de lanzamiento, y no de la masa.</u>

   De la misma forma, la E_m en su altura máxima ($h_{máx}$) o la altura a la que se encuentra el cuerpo (*h*), es la misma que la E_m al llegar al suelo, con lo que también podemos igualar ambas expresiones:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h$$

   Despejando la velocidad de llegada (*v*) nos queda:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,;\, si\ v_0 = 0 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Es decir, la velocidad con que llega al suelo un cuerpo, y por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al suelo, no depende de la masa del cuerpo.

1.4. REDIMIENTO ENERGÉTICO.

Se define el **rendimiento (η)** como la relación entre la *energía útil* obtenida y la *energía suministrada o aportada* en una transformación energética.

La relación entre la *energía útil* y la *energía suministrada* a una máquina se suele expresar en porcentaje, siempre es menor al 100 % y no tiene unidades:

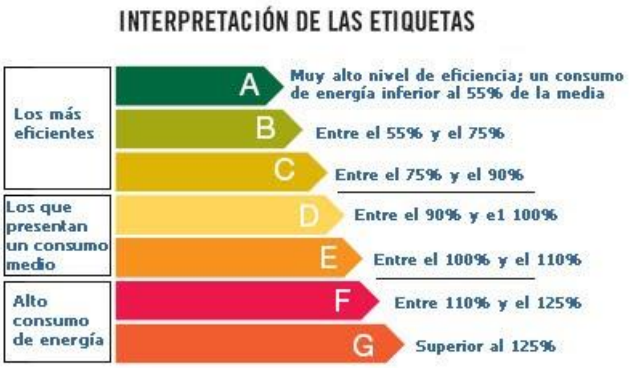
$$\eta\,(\%) = \frac{Energía\ útil}{Energía\ suministrada} \cdot 100$$

Por ejemplo, cuando ponemos en marcha el motor del coche, la mayor parte de la energía generada por el combustible se pierde en forma de calor, sólo un 30% aproximadamente de esta energía química se transforma en energía cinética que hace andar al coche.

Este desperdicio de energía es el que indica la **eficiencia** de una máquina, de forma que cuanto menor sea la energía disipada, mayor será el rendimiento de la máquina.

Un sistema *energéticamente eficiente* es aquel que tiene un rendimiento máximo, es decir, aprovecha al máximo la energía que le suministramos.

Un electrodoméstico es eficiente si ofrece las mismas prestaciones que otros consumiendo menos energía.



Con el propósito de informar a los usuarios de la **eficiencia energética** de los electrodomésticos, la Unión Europea puso en marcha el sistema de **etiquetas energéticas**. Todos los electrodomésticos deben venir clasificados con una *etiqueta energética*.

Son obligatorias para electrodomésticos como frigoríficos, congeladores, vinotecas, lavadoras, secadoras, lavavajillas, pantallas electrónicas (monitores y TV) y lámparas de uso doméstico.

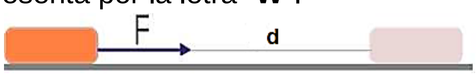
2. TRABAJO.

El **trabajo** es una de las formas de transmisión de energía entre los cuerpos. Cuando ejercemos una fuerza (*F*) sobre un cuerpo, y ésta produce un desplazamiento (*d*) sobre dicho cuerpo, decimos que dicha fuerza ha realizado un *trabajo*. Si no se produce desplazamiento, no hay *trabajo*. Para realizar un trabajo es preciso ejercer una fuerza sobre un cuerpo y que éste se desplace.

Una persona que está empujando un cuerpo pesado, si no lo mueve, no está realizando trabajo. Realiza un gran esfuerzo, pero trabajo no.

El trabajo es el producto de la fuerza aplicada por el espacio recorrido, siempre que ambas magnitudes tengan igual dirección y sentido. El *trabajo* se representa por la letra "**W**".

$$W = F \cdot d$$

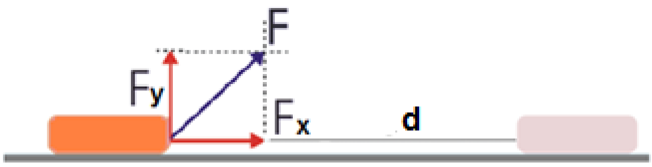


La unidad de trabajo en el Sistema Internacional es el **Julio (J)**. *1 Julio = 1 N·m*.

La ecuación anterior que nos permite calcular trabajo es válida siempre que la *dirección de la fuerza* coincida con la *dirección del movimiento* del cuerpo. En caso de no coincidir, hay que tener en cuenta el ángulo α que forman estas dos direcciones. Es decir:

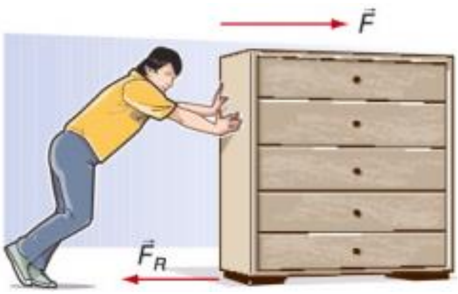
$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha$$

Supongamos un caso en que esto ocurre. Como vemos en la figura, la fuerza constante ***F*** que actúa sobre el cuerpo se descompone en otras dos componentes, F_x y F_y. El trabajo que se realiza es debido a la componente F_x de la fuerza en la dirección paralela al movimiento. La componente F_y de la fuerza, que perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.



Hasta ahora, hemos venido trabajando sólo con superficies ideales, pero esto no sucede en la realidad, por lo que debemos empezar a tener en cuenta la *fuerza de rozamiento*.

La **fuerza de rozamiento**, F_R, es la fuerza que aparece cuando tenemos dos o más superficies en contacto. Idealmente las superficies son lisas, pero en realidad, las superficies presentan irregularidades que originan resistencia al movimiento, y esta resistencia se manifiesta a través de la *fuerza de rozamiento*.



La *fuerza de rozamiento* se opone al movimiento, es decir, siempre actúa en dirección opuesta al movimiento. La *fuerza de rozamiento* es proporcional a la *fuerza normal*, *N* (reacción ejercida por la superficie sobre el objeto a desplazar). El módulo de la *fuerza de rozamiento* no depende del tamaño de las superficies en contacto. La fórmula de la *fuerza de rozamiento* es la siguiente:

$$F_R = \mu \cdot N \; ; \; N = P = m \cdot g$$

Tanto la *fuerza de rozamiento* como la *fuerza normal* se expresan en *Newtons*. El *coeficiente de rozamiento*, μ, es adimensional, y su valor varía en función del tipo de superficie que tengamos.

Si al realizar un trabajo existe una *fuerza de rozamiento*, ésta realiza un trabajo negativo. La fuerza de rozamiento hace que se pierda energía cuando el cuerpo se desplaza.

$$W_R = - F_R \cdot d$$

El *trabajo* es una medida de la cantidad de energía que se intercambia o que se transforma.

Ejemplo 1:

Una fuerza de 100 N actúa sobre un cuerpo que se desplaza a lo largo de un plano horizontal en la misma dirección del movimiento. Si el cuerpo se desplaza 20 m. ¿Cuál es el trabajo realizado por dicha fuerza?

Datos del enunciado: $F = 100\ N$; $\alpha = 0º$; $d = 20\ m$.

Todos los datos se encuentran en unidades del SI; por tanto, sustituimos en la fórmula:

$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha = 100 \cdot 20 \cdot 1 = 2000\ J$$

Ejemplo 2:

Calcula el trabajo necesario para subir un cuerpo de 85 kg, a velocidad constante, desde una altura de 11 m hasta una altura de 16 m.

$$F = P = m \cdot g = 85 \cdot 9{,}8 = 833\ N;\ d = 16 - 11 = 5\ m$$

$$W = F \cdot d = 833 \cdot 5 = 4165\ J$$

El trabajo realizado *W* coincide con la variación de la energía potencial (ΔE_p) que tiene el cuerpo.

Ejemplo 3:

Una fuerza de 68 N actúa sobre un cuerpo de masa 10 Kg que se desplaza a lo largo de un plano horizontal en la misma dirección del movimiento. Si el cuerpo se desplaza 2 m y μ = 0,5, calcula el trabajo total realizado sobre dicho cuerpo.

$$N = P = m \cdot g = 10 \cdot 9{,}8 = 98\ N \rightarrow F_R = \mu \cdot N = 0{,}5 \cdot 98 = 49\ N$$

$$W_T = F_T \cdot d = (68 - 49) \cdot 2 = 19 \cdot 2 = 38\ J$$

3. POTENCIA.

La **potencia** es una magnitud que relaciona la *energía consumida* por un objeto y el tiempo empleado en ese consumo. Se representa por la letra **P**.

La expresión matemática que relaciona ambas magnitudes es esta:

$$\boldsymbol{P = \frac{E}{t} \rightarrow E = P \cdot t}$$

La unidad de potencia en el Sistema Internacional es el **vatio (W).** Un *vatio* es un *J/s*. Un múltiplo de este que es muy utilizado en la práctica, es el **kilovatio (1 KW = 1000 W)**.

Es evidente que un electrodoméstico consumirá más energía si tiene más potencia. Una bombilla de 100 W consumirá más que una de 60 W, pero lo ideal es instalar bombillas de bajo consumo, ya que con una potencia de 12 vatios se obtiene un rendimiento energético muy superior.

Ejemplo:

Un motor eléctrico desarrolla una potencia de 5 KW y está funcionando durante 4 horas. ¿Qué energía ha necesitado?

Teniendo en cuenta que $E = P \cdot t$:

$$E = P \cdot t = 5 \cdot 4 = 20KWh$$

La *potencia* también es una magnitud que nos relaciona el *trabajo* realizado con el tiempo empleado en hacerlo. La potencia nos indica la rapidez con que se realiza un trabajo. Si una máquina realiza un trabajo, no sólo importa la cantidad de energía que produce, sino también el tiempo que tarda en hacerlo. Por ejemplo, decimos que un coche es más potente si es capaz de pasar de 0 a 100 km/h en un menor tiempo.

La fórmula que nos relaciona la potencia con el trabajo es:

$$\boldsymbol{P = \frac{W}{t}}$$

Hemos comentado antes que la unidad utilizada en el S.I. para la potencia era el vatio (W). También se usa con frecuencia otra unidad para la potencia: el **caballo de vapor (CV)**.

1 CV = 736 W

Cuando el resultado de una máquina es producir movimiento, como los motores de los vehículos, podemos relacionar la potencia con la velocidad:

$$\boldsymbol{P} = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

<u>Ejemplo</u>:

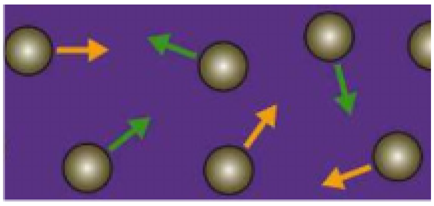
Dos grúas suben un cuerpo de 100 Kg a una altura de 20 m. La primera tarda 40 s y la segunda 50 s. Calcular la potencia que desarrolla cada grúa.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \frac{m \cdot g \cdot d}{t}$$

$$P_1 = \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 20}{40} = 490\,W\ ;\ P_2 = \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 20}{50} = 392\,W$$

4. CALOR Y TEMPERATURA.

La **energía térmica** es la que poseen los cuerpos debido al movimiento de las partículas que lo forman. Por eso, este movimiento también se llama **agitación térmica**.

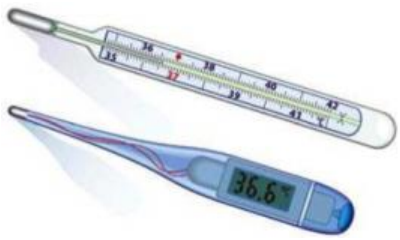


La *agitación térmica* de las partículas que forman un cuerpo está relacionada con su *temperatura*, de hecho: "*cuanto mayor sea la temperatura de un cuerpo, mayor es la agitación térmica y la cantidad de energía térmica que posee*".

Todos sabemos que cuando calentamos un objeto su temperatura aumenta. A menudo pensamos que **calor** y **temperatura** son lo mismo, pero esto no es así. El *calor* y la *temperatura* están relacionadas entre sí, pero son conceptos diferentes.

<u>Temperatura</u>

La **temperatura** es una medida del *calor* o de la *energía térmica* de las partículas en una sustancia, no es una energía sino una medida de ella. Se mide en **ºC (grados centígrados)**, **ºF (grados Fahrenheit)**, o **K (grados Kelvin)**. Para medirla utilizamos *termómetros* u otros aparatos.



La *escala centígrada*, hace corresponder *0 ºC* a la temperatura de congelación del agua y *100 ºC* a la temperatura de ebullición del agua y la divide en 100 divisiones (ºC). La *escala Fahrenheit*, asigna *32 ºF* y *212 ºF* a las temperaturas de congelación y ebullición del agua, respectivamente y tiene 180 divisiones (ºF). *La escala Kelvin (K)* se obtiene sumando 273 a los ºC. Así *0 ºC* equivaldría a *273 K* y *0 K* serían *- 273º C*, que es el llamado *cero absoluto*, una temperatura imposible de conseguir.

$$\boldsymbol{°F = °C \cdot \frac{9}{5} + 32\ ;\ K = °C + 273}$$

La *temperatura* está directamente relacionada con la velocidad de las partículas de los cuerpos, provocando su aumento al paso de sólido a líquido y luego a vapor, y disminuyendo a la inversa.

<u>Calor</u>

El **calor** es la variación de la *energía térmica* de un cuerpo. Por lo tanto, el *calor* no es una magnitud independiente que se pueda “almacenar” en los cuerpos. La magnitud que aumenta o disminuye en un cuerpo es su energía térmica y estas variaciones se reflejarán en la variación de la temperatura. El calor es una de las formas de transferir energía a un cuerpo o sistema. Esto ocurre cuando dos sistemas materiales están a distinta temperatura o se está produciendo un cambio de estado.

El **calor (Q)**, es la transferencia de energía entre un cuerpo que está a mayor temperatura (caliente), a otro que está a menor temperatura (frío). El calor no es algo que posean los cuerpos, es algo que fluye entre dos cuerpos a distinta temperatura. Al cabo de un tiempo ambos cuerpos tendrán la misma temperatura. En ese momento los cuerpos han alcanzado el **equilibrio térmico**.

Para que exista calor debe existir diferencia de temperatura, pero no todos los cuerpos transmiten el calor con igual facilidad, aunque la variación de la temperatura sea igual. Hay que tener claro que el *calor* y la *temperatura* no son lo mismo.

Cuando un cuerpo absorbe calor cambia su temperatura. El aumento de temperatura de los cuerpos cuando se calientan es proporcional a la energía suministrada.

El calor es una energía en tránsito, es decir, una energía que pasa de un cuerpo a otro. Al tratarse de una forma de energía, la unidad de calor en el S.I. es el **julio (J)**. Sin embargo, es frecuente que el calor se mida en **calorías (cal)** o **kilocalorías (Kcal)**.

1 J = 0,24 cal ; 1 cal = 4,18 J

Se llama *caloría* a la cantidad de calor necesaria para que 1g de agua aumente 1º C su temperatura.

Si ponemos a calentar la misma cantidad de dos sustancias diferentes y les suministramos la misma cantidad de energía la temperatura final de cada sustancia es distinta. No todos los cuerpos se calientan de la misma forma. Esto se debe a una propiedad específica de las sustancias llamada *calor específico*.

Lo que un cuerpo se caliente o enfríe no solo depende del calor que gane o pierda, sino también de la masa que tenga. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, más calor debe ganar o perder para que su temperatura cambie una cantidad concreta.

El **calor específico (C_e)** de una sustancia nos indica cuánto calor debe perder o ganar 1 Kg de dicha sustancia para que su temperatura varíe 1 K.

Cuanto mayor sea el *calor específico* de una sustancia, más calor debe ganar o perder para que su temperatura cambie una cantidad concreta. En el S.I. el calor específico del agua es $C_e = 4180$ *J/kg·K*. Si el dato lo damos en calorías es *1 cal /g·ºC*.

El aparato que se utiliza para medir el *calor específico* se llama *calorímetro*.

La cantidad de calor que necesita absorber o perder un cuerpo para que su temperatura varíe en una cierta cantidad, la podemos calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{Q = m \cdot C_e \cdot \Delta T = m \cdot C_e \cdot (T_f - T_i)}$$

donde Q es la energía, en forma de calor, que el cuerpo ha ganado o perdido, m es la masa del cuerpo, C_e es el calor específico del cuerpo y T_f y T_i son las temperaturas final e inicial que tiene el cuerpo.

Si el cuerpo absorbe calor, $T_f > T_i \rightarrow Q > 0$. Si el cuerpo cede calor, $T_f < T_i \rightarrow Q < 0$.

El cociente entre el calor y la variación de temperatura se llama **capacidad calorífica C**.

$$\boldsymbol{C = m \cdot C_e}$$

Se cumple que el calor cedido es igual al calor ganado (**$Q_{cedido} = Q_{ganado}$**). Por convenio, el *calor cedido* es negativo y el *calor ganado* positivo.

Ejemplo 1:

Un trozo de hierro de 200 gramos de masa que se encuentra a 30 ºC, se calienta hasta alcanzar 80 ºC. ¿Qué cantidad de calor ha absorbido? Dato: $C_{e\ hierro}$ = 450 J/Kg·K.

Lo primero que tenemos que hacer es convertir todos los datos al Sistema Internacional:

200 g = 0,2 Kg; 30 ºC = 303 K; 80 º C = 353 K

Sustituyendo estos datos en la fórmula:

$$Q = m \cdot C_e \cdot (T_f - Ti) = 0{,}2 \cdot 450 \cdot (353 - 303) = 4500\,J$$

Ejemplo 2:

Calcula la temperatura final de la mezcla de 300 g de agua que se encuentra a 20 ºC y 500 g de alcohol a una temperatura de 50 ºC. Datos: $C_{e\ (alcohol)}$ = 2450 J/Kg·ºC ; $C_{e\ (agua)}$ = 4180 J/kg º C.

$Q_{cedido} = Q_{ganado}$

$m_c \cdot C_e \cdot (T_i - T_f) = m_g \cdot C_e \cdot (T_f - T_i)$

$0{,}5 \cdot 2450 \cdot (50 - T_f) = 0{,}3 \cdot 4180 \cdot (T_f - 20)$

$61250 - 1225\, T_f = 1254 T_f - 25080$

$86330 = 2479\, T_f \rightarrow T_f = 34{,}82$ ºC.

Calor y trabajo

El *calor* y el *trabajo* son dos formas de transferencia de energía, o de energía en tránsito.

El *calor* puede producir *trabajo*. Un ejemplo de ello lo podemos comprobar en un coche. La quema del combustible dentro del coche hace que la energía química del combustible se transforme en energía térmica. Ésta a su vez hace que los pistones del coche se muevan, desarrollando de esta forma un trabajo.

Posteriormente este trabajo será transformado en energía mecánica y hará que se mueva el coche.

5. PROBLEMAS ASOCIADOS A LA OBTENCIÓN, TRANSPORTE Y UTILIZACIÓN DE LA ENERGÍA.

De todos los tipos de energía, la **energía eléctrica** es la más demandada del mundo industrializado y se obtiene a partir de fuentes de energía renovables y no renovables, en diferentes tipos de centrales. Los problemas asociados a su **obtención** y **producción** son:

- **Impactos en la flora y fauna**. Destrucción de terrenos en la explotación de minas, pozos petrolíferos y construcción de presas.
- **Impactos en el paisaje**. Debidos a la construcción de diferentes tipos de centrales.
- **Impactos en el suelo**. Destrucción de suelo fértil por ocupación de terrenos o contaminación de la lluvia ácida.
- **Contaminación del agua y de la atmósfera**. Por la eliminación de sustancias tóxicas o por incremento de la temperatura del agua procedente de los circuitos de refrigeración. Por la liberación de sustancias tóxicas al aire procedente de la quema de diversos combustibles fósiles.

Los problemas asociados a su **transporte** son:

- **Impactos en el paisaje**. Provocados por las torres y líneas de alta tensión.
- **Impactos sobre la fauna**. Las torres de alta tensión causan numerosos accidentes a las aves.

Los problemas asociados a la **utilización** de la energía son:

- **Contaminación atmosférica**. Los gases producidos provocan alteraciones climáticas, respiratorias y en los ecosistemas.
- **Contaminación acústica**. Las máquinas generan ruido por encima de los niveles tolerables.
- **Contaminación por ondas**. Las ondas electromagnéticas (ultravioletas, rayos X…) pueden producir graves problemas de salud.
- **Contaminación radiactiva**. El material radiactivo tarda muchos años en perder su radiactividad. Además los accidentes en las propias centrales, la gestión de estos residuos, su transporte y almacenamiento constituyen un grave problema de difícil solución por el momento.

RESUMEN DEL TEMA 9

1. LA ENERGÍA.

La **energía** se define como la capacidad de un cuerpo o sistema de producir algún cambio en sí mismo o en otros. Mientras se realizan los cambios, se está produciendo un intercambio de energía.

Desde el punto de vista físico, la *energía* se define como la capacidad que tienen los cuerpos o sistemas de realizar un *trabajo* o de transferir *calor*.

Los cuerpos pueden intercambiar energía de dos formas, mediante **trabajo** o **calor**.

Su unidad en el Sistema Internacional es el **Julio (J)**. 1 Julio = 1 N·m. También se mide en otras unidades, como la **caloría (cal)** o la **kilocaloría (Kcal)**. **1 cal = 4,18 J.**

En el caso de la energía eléctrica su unidad de medida **Kilovatio-hora (KWh)**. Se usa como unidad de medida de la energía eléctrica que consumimos en casa. **1 KWh = 3600000 J**.

1.1. PROPIEDADES GENERALES DE LA ENERGÍA.

La *energía* es una propiedad que poseen todos los cuerpos y que tiene varias características:

- **Permite producir cambios en los cuerpos**. Los *cambios* pueden ser: *físicos*, *químicos*, *geológicos* o *biológicos*.
- **Puede ser transformada de una a otra forma de energía**.
- **Puede ser transferida de uno a otro cuerpo**, realizando un trabajo o en forma de calor.
- **Puede ser almacenada**, para ser utilizada en otro momento.

1.2. TIPOS O FORMAS DE ENERGÍA.

La *energía* se manifiesta de diferentes formas y recibe distintos nombres según las acciones y cambios que provoca o los fenómenos a los que se asocian. Entre todas ellas podemos destacar las siguientes:

Energía cinética

La energía cinética es la que tiene un cuerpo por el hecho de estar en movimiento. Depende de la masa del cuerpo y de su velocidad.

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$$

donde m = masa del cuerpo en *kilogramos (kg)* y la velocidad lineal del objeto en *metros por segundo (m/s)*.

Energía potencial

Es la energía que tienen los cuerpos por ocupar una determinada posición. Podemos hablar de *energía potencial gravitatoria* y de *energía potencial elástica*.

- **Energía potencial gravitatoria**. Es la energía de un cuerpo asociada a la altura a la que se encuentra un cuerpo respecto a la superficie de la Tierra.

$$\boldsymbol{E_p = m \cdot g \cdot h}$$

donde g = *aceleración de la gravedad* = *9,8* m/s^2 y h = altura en metros a la que se encuentra el cuerpo.

Cuando un cuerpo gana altura almacena *energía potencial gravitatoria*, esta energía se libera cuando el cuerpo cae o pierde altura, en ese momento el cuerpo gana velocidad y la energía potencial se transforma en energía cinética.

- **Energía potencial elástica**. Es la energía que se acumula en los cuerpos elásticos (gomas, muelles, resortes, etc.) al ser comprimidos por la acción de una fuerza. Su expresión matemática es:

$$E_{px} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \, ; \; F_x = k \cdot x$$

donde *k* es una constante característica de cada muelle, que se expresa en *N/m*, y *x* es la longitud que se deforma el muelle, que se expresa en *m*.

Energía térmica o calorífica.

Se transfiere en forma de *calor* y está asociada a la *temperatura*. La *energía térmica* se debe al movimiento de las partículas que constituyen la materia. Un cuerpo posee mayor cantidad de energía térmica cuanto más rápido es el movimiento de sus partículas. La transferencia de *energía térmica* o *calorífica* se produce desde un cuerpo a mayor temperatura (caliente) hasta un cuerpo a menor temperatura (frio), en forma calor. Se dice que se alcanza el *equilibrio térmico* cuando la temperatura de ambos se iguala. Su unidad en el S.I. es la **caloría (cal)**. **1J = 0,24 cal**.

Existen tres formas de transmitir la **energía térmica o calorífica**:

- **Conducción**. Se presenta fundamentalmente en los sólidos. El paso de calor (energía) de un cuerpo de mayor temperatura a uno de menor, se produce por efecto de choques moleculares. Por ejemplo, un trozo de carne que se cocina en una sartén.
- **Convección**. Es la forma más habitual de propagarse el calor en los fluidos (líquidos y gases). Los fluidos (aire, agua, etc.) al calentarse disminuyen su densidad, produciendo corrientes ascendentes de fluido caliente y corrientes descendentes de fluido frio. Ejemplo: el calor del radiador que asciende hasta el techo porque el aire caliente tiene menos densidad.
- **Radiación**. Todos los cuerpos, por estar a una determinada temperatura, emiten radiación, tanto más energética cuanto mayor sea su temperatura. Un cuerpo más caliente que el ambiente que lo rodea irradia calor en forma de ondas que se transmiten a distancia. Ejemplo: el calor del Sol se propaga por radiación.

Energía química

Es la energía liberada en las *reacciones químicas*. Se produce cuando los enlaces atómicos se rompen y estos se combinan formando nuevos productos.

Se producen reacciones químicas cuando por ejemplo quemamos un combustible o al ingerir alimentos en nuestro organismo. Estos son metabolizados por nuestras células.

Energía eléctrica

La **energía eléctrica** es causada por el movimiento de las cargas eléctricas en el interior de los materiales conductores. La *energía eléctrica* se manifiesta como *corriente eléctrica*, mediante movimiento de electrones en un circuito.

La expresión matemática que nos permite calcularla es esta:

$$E_e = P \cdot t = V \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t$$

donde *P = potencia expresada en vatios (W)*, *t = tiempo en segundos*, *V = voltaje en voltios (V)*, *R = resistencia eléctrica en ohmios (Ω)* y *I = intensidad de corriente en amperios (A)*.

Energía nuclear

Es la energía almacenada en el núcleo de los átomos y que se libera en las **reacciones nucleares de fisión** (rotura de núcleos) o de **fusión** (unión de núcleos). En dichas reacciones se produce una gran liberación de energía.

Albert Einstein demostró que la materia se podía transformar en energía según la fórmula:

$$E = m \cdot c^2$$

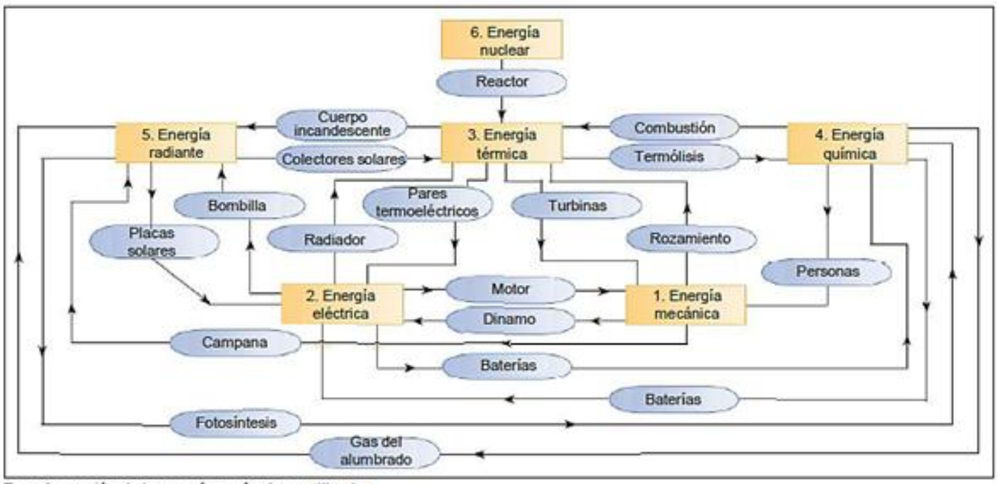
donde *E = energía producida en julios (J)*, *m = masa que desaparece (en kg)* y *c = velocidad de la luz ($3 \cdot 10^8$ m/s)*.

Energía radiante

Es aquella que se transmite en forma de ondas. Se refiere a la que poseen las *ondas electromagnéticas* como la *luz visible*, las *ondas de radio o televisión*, las *microondas*, los *rayos ultravioleta (UV)*, los *rayos infrarrojo (IR)* o los rayos X. El Sol es una fuente inagotable de *energía radiante* gracias a la cual se pueden calentar cuerpos expuestos a su radiación. La característica principal de esta energía es que se puede propagar en el vacío, sin necesidad de soporte material alguno.

1.3. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

El **principio de conservación de la energía** dice que "*la energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma*". Cuando la energía se transforma o se transfiere, su cantidad total no varía, pero no la calidad, pues después de cada transformación energética se *degrada* y puede realizar menos trabajo.



Transformación de la energía y máquinas utilizadas.

En cada **transformación energética**, parte de la energía siempre se convierte en *calor (energía térmica)*, por lo que cada transformación conlleva necesariamente una **degradación de la energía**. Se dice, entonces, que el *calor* es una forma degradada de energía.

1.3.1. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

El *Principio de conservación de la energía* se puede aplicar a cualquier tipo de energía, como la *energía mecánica*. Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza externa (rozamiento, etc.), excepto su propio peso, su energía mecánica se mantiene constante. Dos conclusiones a las que podemos llegar aplicando el "*principio de conservación de la energía mecánica*" son:

- La altura que alcanza un cuerpo cuando se lanza hacia arriba sólo depende de la velocidad de lanzamiento y no de la masa.

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

- La velocidad con que llega al suelo un cuerpo, y por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al suelo, no depende de la masa del cuerpo.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,; si\ v_0 = 0 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

1.1. RENDIMIENTO ENERGÉTICO.

El **rendimiento energético (η)** es la relación entre la *energía que suministramos* a un sistema y la *energía útil* que obtenemos realmente. El rendimiento se suele expresar en tanto por ciento.

$$\eta\,(\%) = \frac{Energía\ útil}{Energía\ suministrada} \cdot 100$$

Un sistema *energéticamente eficiente* es aquel que tiene un rendimiento máximo, es decir, aprovecha al máximo la energía que le suministramos.

2. TRABAJO.

El **trabajo** es una medida de la cantidad de energía que se intercambia o que se transforma.

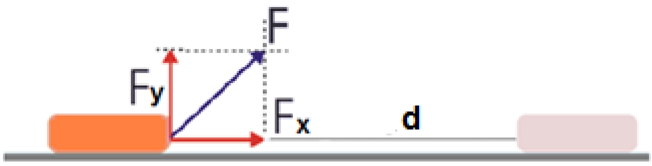
Cuando ejercemos una fuerza (*F*) sobre un cuerpo, y ésta produce un desplazamiento (*d*) sobre dicho cuerpo, decimos que dicha fuerza ha realizado un *trabajo.*

El *trabajo* es el producto de la fuerza aplicada por el desplazamiento producido, siempre que ambas magnitudes tengan igual dirección y sentido. El *trabajo* se representa por la letra "**W**".

W = F · d

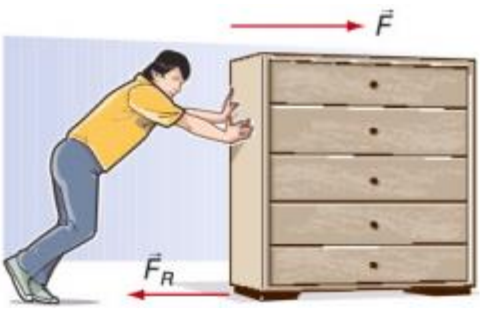
La unidad de trabajo en el Sistema Internacional es el **Julio (J)**. *1 Julio = 1 N·m*.

Si la dirección de la fuerza no coincide con la dirección del movimiento del cuerpo, es decir, forman un cierto ángulo α, la fórmula para calcular el trabajo realizado es esta:



$$W = F \cdot d \cdot \cos\alpha$$

Si al realizar un trabajo existe una **fuerza de rozamiento**, F_R, ésta realiza un trabajo negativo, ya se opone al movimiento. Dicho trabajo negativo vendrá expresado por la siguiente fórmula: $W_R = -F_R \cdot d$; $F_R = \mu \cdot N$.



3. POTENCIA.

La **potencia** es una magnitud que relaciona la *energía consumida* por un objeto y el tiempo empleado en ese consumo. Se representa por la letra **P**.

La expresión matemática que relaciona ambas magnitudes es: $\boldsymbol{P = E/t}$

La unidad de potencia en el Sistema Internacional es el **vatio (W).** Un *vatio* es un *J/s*. Un múltiplo de este que es muy utilizado en la práctica, es el **kilovatio (1 KW = 1000 W)**.

La fórmula que nos relaciona la *potencia* con el *trabajo* es: $\boldsymbol{P = W/t}$

También se usa con frecuencia otra unidad para la potencia: el **caballo de vapor (CV)**.

1 CV = 736 W

Cuando el resultado de una máquina es producir movimiento, como los motores de los vehículos, podemos relacionar la potencia con la velocidad:

$$\boldsymbol{P} = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \boldsymbol{F \cdot v}$$

4. CALOR Y TEMPERATURA.

El **calor** es la variación de la *energía térmica* de un cuerpo. El *calor* es una *energía en tránsito*, es decir, una energía que se pasa de un cuerpo más caliente a otro más frio. Al cabo de un tiempo ambos cuerpos tendrán la misma temperatura. En ese momento los cuerpos han alcanzado el **equilibrio térmico**.

Es frecuente que el calor se mida en **calorías (cal)** o **kilocalorías (Kcal)**.

El calor no es algo que posean los cuerpos, es algo que fluye entre dos cuerpos a distinta *temperatura*. Para que exista calor debe existir diferencia de temperatura, pero no todos los cuerpos transmiten el calor con igual facilidad, aunque la variación de la temperatura sea igual, esto se debe a una propiedad específica de las sustancias llamada *calor específico*.

El **calor específico (C_e)** de una sustancia nos indica cuánto calor debe perder o ganar 1 Kg de dicha sustancia para que su temperatura varíe 1 K.

En el S.I. el calor específico del agua es $C_e = 4180\ J/kg \cdot K$. Si el dato lo damos en calorías es *1 cal /g·ºC*. El aparato que se utiliza para medir el *calor específico* se llama *calorímetro*.

La cantidad de calor que necesita absorber o perder un cuerpo para que su temperatura varíe en una cierta cantidad, la podemos calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{Q = m \cdot C_e \cdot \Delta T = m \cdot C_e \cdot (T_f - Ti)}$$

donde *Q* es la energía, en forma de calor, que el cuerpo ha ganado o perdido, *m* es la masa del cuerpo, C_e es el calor específico del cuerpo y T_f y T_i son las temperaturas final e inicial que tiene el cuerpo.

Si el cuerpo absorbe calor, $T_f > T_i \rightarrow Q > 0$. Si el cuerpo cede calor, $T_f < T_i \rightarrow Q < 0$.

Se cumple que el calor cedido es igual al calor ganado (**$Q_{cedido} = Q_{ganado}$**). Por convenio, el *calor cedido* es negativo y el *calor ganado* positivo.

La **temperatura** de una sustancia es una magnitud física que mide el *grado de agitación* o energía cinética de sus partículas, es decir, la cantidad de energía interna que posee, y se mide con el *termómetro,* en **grados Celsius (º C) o Kelvin (K)**.

Para convertir temperaturas entre estas escalas basta aplicar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{°F = °C \cdot \frac{9}{5} + 32\ ; K = °C + 273}$$

El *calor* y la *temperatura* son dos magnitudes distintas.

5. PROBLEMAS ASOCIADOS A LA OBTENCIÓN, TRANSPORTE Y UTILIZACIÓN DE LA ENERGÍA.

Los problemas asociados a su **obtención** y **producción** son:

- *Impactos en la flora y fauna*.
- *Impactos en el paisaje*.
- *Impactos en el suelo*.
- *Contaminación del agua y de la atmósfera.*

Los problemas asociados a su **transporte** son:

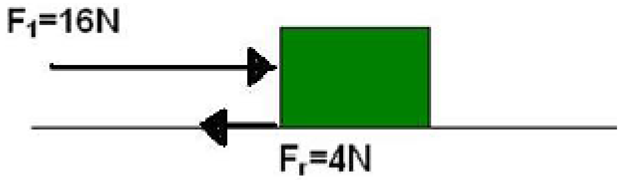
- *Impactos en el paisaje*.
- *Impactos sobre la fauna*.

Los problemas asociados a la **utilización** de la energía son:

- *Contaminación atmosférica*.
- *Contaminación acústica*.
- *Contaminación radiactiva*.

<u>ACTIVIDADES DEL TEMA 9</u>: “TRABAJO, ENERGÍA Y CALOR”.

1. **Un coche de 1000 Kg marcha a una velocidad de 108 Km/h ¿Cuál es su energía cinética? (1.2.; 3.1. → B)**
2. **Un cuerpo de 10 Kg tiene una E_c de 4500 J, calcula su velocidad. (1.2.; 3.1. → B)**
3. **Calcula la energía potencial que tiene un cuerpo de 8 Kg que se encuentra a 50 m de altura. (1.2.; 3.1. → B)**
4. **Un cuerpo que se encuentra a 20 m de altura tiene una E_p de 1000 J. Calcular cuál es su masa. (1.2.; 3.1. → B)**
5. **Calcular la energía mecánica de un avión de 14000 Kg que vuela a 200 m de altura a una velocidad de 400 m/s. (1.2.; 3.1. → B)**
6. **Se lanza hacia arriba un objeto cuya masa es de 7 Kg con una velocidad inicial de 20 m/s. Determina: (1.2.; 3.1. → B)**
   a) El valor de la energía mecánica en el instante del lanzamiento.
   b) La altura en el punto más alto de su trayectoria.
7. **Se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, un cuerpo con una velocidad de 80 m/s, calcular cual es la altura máxima que alcanza. (3.1. → B)**
8. **Calcula la velocidad de llegada de una pelota cuya velocidad de lanzamiento es de 5 m/s y se ha tirado de altura de 1,27 m. (3.1. → B)**
9. **Se deja caer un cuerpo desde una altura de 180 m. Calcular la velocidad con que llega al suelo. (3.1. → B)**
10. **Explica si realizas, o no, trabajo cuando: (4.1. → B)**
    a) Empujas una pared.
    b) Sostienes un libro a 2 metros de altura.
    c) Desplazas un carrito hacia delante.
11. **Una fuerza de 300 N actúa sobre un cuerpo que se desplaza a lo largo de un plano horizontal en la misma dirección del movimiento. Si el cuerpo se desplaza 10 m, ¿cuál es el trabajo realizado por dicha fuerza? (5.1. → B)**
12. **Sobre un cuerpo inicialmente en reposo, actúan las siguientes fuerzas, produciendo un desplazamiento de 20 m. Calcular el trabajo que se realiza. (5.1. → B)**



13. **Un escalador con una masa de 60 kg invierte 30 s en escalar una pared de 10 m de altura. Calcula: (5.1. → B)**
    a) El peso del escalador.
    b) El trabajo realizado en la escalada.

14. Si tu minicadena de música es de 100W y te pasas toda la tarde (5 horas) escuchando música, ¿cuántos KWh has consumido? (2.1. → B)

15. Por un motor eléctrico conectado a una tensión de 220 voltios circula durante 1 hora una corriente de 8 amperios de intensidad. En ese tiempo ha conseguido elevar un cuerpo de 8000 Kg a 25 m de altura. Calcula el rendimiento energético del motor. (3.1.; 5.1. → B)

16. Dos grúas suben un cuerpo de 100 Kg a una altura de 20 m. La primera tarda 40 s y la segunda 50 s. Calcular la potencia que desarrolla cada grúa. (5.1. → B)

17. Una grúa eleva un bloque de hormigón de 550 Kg hasta una altura de 12 m en un tiempo de 7s. Calcula: (5.1. → B)

a) La potencia que desarrolla la grúa, expresada en KW y CV.

b) El trabajo realizado por la grúa.

18. Un alumno sube la cuerda en la clase de Educación Física en 8 segundos. Su masa es de 65 Kg y la longitud de la cuerda de 6 m. ¿Con qué potencia ha subido la cuerda? (3.1.; 5.1. → B)

19. ¿Cuál será la potencia necesaria para elevar un ascensor de 4500 Kg hasta 8 m de altura en 30 s? (3.1.; 5.1. → B)

20. Calcular la velocidad que alcanza un automóvil de 1500 Kg en 6 s, partiendo del reposo, si tiene una potencia de 100 CV. (3.1.; 5.1. → B)

21. Rellena el siguiente cuadro. (6.2. → B)

ºC	ºF	ºK
-273		
	5	
		273
25		
	122	
		351
100		

22. ¿Qué cantidad de calor hay que comunicar a 3,4 Kg de agua para elevar su temperatura de 10 a 100 ºC? (calor específico del agua es de 1 Kcal/Kg·ºC) (8.1. → I)

23. Se mezclan 200 gramos de agua a 20 ºC con 400 gramos de agua a 80 ºC. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla? (Dato: $C_{e\ agua}$ = 1 Kcal/Kg·ºC). (8.2. → I)

24. En un recipiente, con 3 litros de agua a 10º C, se sumerge un bloque de 3 kg de hierro a la temperatura de 150 ºC. Calcula la temperatura final. (Dato: calor específico del agua es de 1 Kcal/Kg·ºC y el del hierro 0,119 Kcal/Kg·ºC; d_{agua} = 1 Kg/dm^3). (8.2. → I)

25. ¿Qué tipo de transformación de energía logran los siguientes objetos? (2.1. → B)

- Bombilla.
- Estufa de gas
- Motor de un coche
- Altavoz
- Pila
- Panel solar agua caliente

- Aerogenerador - Micrófono - Motor eléctrico
- Fuegos artificiales - Carbón en una caldera - Dinamo de una bici

26. Indica objetos tecnológicos que transformen la energía eléctrica en: (2.1. → B)

a) Energía calorífica:

b) Energía mecánica:

c) Energía luminosa:

d) Energía electromagnética:

e) Energía sonora:

f) Energía química:

27. Completa correctamente las siguientes frases: (2.1. → B)

a) La cuerda de un arco cuando se tensa posee energía _________________________.

b) El agua que cae por las compuertas de una presa posee energía ____________.

c) El sol es un ejemplo de energía ___________.

d) Las células fotovoltaicas transforman directamente la energía solar en energía _________.

SOLUCIONES

1. **Solución**:

   Datos: *m = 1000 Kg; v = 108 Km/s*.

   Pasamos a *m/s* el dato de la velocidad: *108 Km/h = 108000 m/3600 s = 30 m/s*.

$$\boldsymbol{E_c} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 30^2 = \mathbf{450000}\, \boldsymbol{J}$$

2. **Solución**:

   Datos: *m = 10 Kg;* E_c *= 4500 J*.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500}{10}} = \sqrt{900} = \mathbf{30}\, \boldsymbol{m/s}$$

3. **Solución**:

   Datos: *m = 8 Kg; h = 50 m*.

$$\boldsymbol{E_p} = m \cdot g \cdot h = 8 \cdot 9{,}8 \cdot 50 = \mathbf{3920}\, \boldsymbol{J}$$

4. **Solución**:

   Datos: *h = 20 m;* E_p *= 1000 J*.

$$E_p = m \cdot g \cdot h \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{E_p}{g \cdot h} = \frac{1000}{9{,}8 \cdot 20} = \mathbf{5{,}1}\, \boldsymbol{Kg}$$

5. **Solución**:

   Datos: *m = 14000 Kg; h = 200 m; v = 400 m/s*.

   E_p *= 14000 ·9,8 ·200 = 27440000 J = 27440 KJ.*

   $$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 14000 \cdot 400^2 = 1120000000\, J = 1120000\, KJ$$

   $\boldsymbol{E_m}$ = E_c + E_p *= 112000 + 27440 =* ***1147440 KJ***.

6. **Soluciones**:

   Datos: *m = 7 Kg;* v_0 *= 20 m/s*.

   a) En el instante inicial consideramos la altura nula.

      h = 0 m → E_p *= 0.*

      $$v_0 = 20\, m/s \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 20^2 = 1400\, J$$

      $\boldsymbol{E_m}$ = E_c + E_p *= 1400 + 0 =* ***1400 J***.

   b) Conforme sube el balón, su velocidad va decreciendo hasta que al alcanzar el punto más alto de su trayectoria. Su velocidad en ese instante es *v = 0*.

      v = 0 m/s → E_c *= 0 J*. Toda la E_c se ha transformado en E_p.

      $\boldsymbol{E_m}$ = E_p = ***1400J*** *= m· g ·h.*

      Despejando *h* de la ecuación → ***h*** = E_p*/m·g = 1400/7·9,8 =* ***20,41 m***.

      Otra forma de resolverlo sería:

$$\boldsymbol{h_{m\acute{a}x}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 9{,}8} = \mathbf{20{,}41}\, \boldsymbol{m}$$

7. **Solución**:

Dato: $v_0 = 80\ m/s$.

$$\boldsymbol{h_{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{80^2}{2 \cdot 9{,}8} = \mathbf{326{,}53\ m}$$

8. **Solución**:

Datos: $v_0 = 5\ m/s$; $h = 1{,}27\ m$.

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{25 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}27} = \mathbf{7{,}06\ m/s}$$

9. **Solución**:

Dato: $h = 180\ m$.

Dado que $v_0 = 0\ m/s \rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 180} = \mathbf{59{,}4\ m/s}$

10. **Soluciones**:

a) Al empujar una pared se hace fuerza pero no se produce ningún desplazamiento, por tanto, el trabajo es nulo.

b) Haces una fuerza sobre el libro para sostenerlo pero no se desplaza, por tanto, el trabajo es nulo.

c) En este caso hay fuerza y desplazamiento, por lo tanto estamos realizando un trabajo.

11. **Solución**:

Datos: $F = 300\ N$; $d = 10\ m$; $\alpha = 0º$.

$\boldsymbol{W} = F \cdot d \cdot \cos \alpha = 300 \cdot 10 \cdot 1 = \mathbf{3000\ J}$.

12. **Solución**:

$F_T = F_1 - F_r = 16 - 4 = 12\ N$.

Como el ángulo α es de $0º \rightarrow \cos 0º = 1$.

$\boldsymbol{W} = F \cdot d \cdot \cos \alpha = 12 \cdot 20 \cdot 1 = \mathbf{240\ J}$.

13. **Soluciones**:

Datos: $m = 60\ Kg$; $t = 30\ s$; $h = 10\ m$.

a) El peso se calcula mediante la 2ª Ley de Newton: $\boldsymbol{P} = m \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = \mathbf{588\ N}$.

b) En la escalada, la fuerza que debe hacer el escalador debe ser igual a su peso y con sentido hacia arriba ($F = P$). Por tanto, fuerza y desplazamiento tienen igual dirección y sentido, el ángulo entre ellos es 0º.

$\boldsymbol{W} = F \cdot d \cdot \cos \alpha = 588 \cdot 10 \cdot 1 = \mathbf{5880\ J}$.

14. **Solución**:

Datos: $P = 100\ W$; $t = 5\ h$.

$\boldsymbol{E} = P \cdot t = 100 \cdot 5 = 500\ Wh = \mathbf{0{,}5\ KWh}$.

15. **Solución**:

Datos: $V = 220\ V$; $I = 8\ A$; $t = 1\ h$; $m = 8000\ Kg$; $h = 25\ m$; $1\ KWh = 3600000\ J$.

$P = V \cdot I = 220 \cdot 8 = 1760\ W = 1{,}76\ KW \rightarrow E_{absorbida} = P \cdot t = 1{,}76 \cdot 1 = 1{,}76\ KWh = 6336000\ J$.

$E_{útil} = E_p = m \cdot g \cdot h = 8000 \cdot 9{,}8 \cdot 25 = 1960000\ J$.

$$\eta = \frac{Energía\ útil}{Energía\ absorvida} \cdot 100 = \frac{1960000}{6336000} \cdot 100 = 30{,}93\%$$

16. Soluciones:

Datos: *m = 100 Kg; h = d = 20 m;* t_1 *= 40 s;* t_2 *= 50 s*.

La fuerza que tendrá que realizar cada una de las grúas coincidirá con el peso del cuerpo:

$$F = P = m \cdot g$$

Además, la dirección y sentido de dicha fuerza coincide con la del desplazamiento, por tanto, $\alpha = 0^o \rightarrow \cos \alpha = 1 \rightarrow W = F \cdot d$. La fórmula que nos permitirá calcula la potencia es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \frac{m \cdot g \cdot d}{t}$$

La potencia realizada por la grúa 1 y 2 es:

$$P_1 = \frac{W}{t_1} = \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 20}{40} = \frac{19600}{40} = 490\ W\ ;\ P_2 = \frac{W}{t_2} = \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 20}{50} = 392\ W$$

17. Soluciones:

W *= F ·d = m ·g ·d = 550 ·9,8 ·12 =* ***64680 J****.*

P *= W/t = 64680 / 7 = 9.240 W =* ***9,24 KW****.*

1 CV = 735 W → 9240 KW = ***12,57 CV****.*

18. Solución:

$W = \Delta E_p \rightarrow E_{pf} = m \cdot g \cdot h \rightarrow W = m \cdot g \cdot h = 65 \cdot 9{,}8 \cdot 6 = 3822\ J.$

P *= W /t = 3822 /8 =* ***477,75 W****.*

19. Solución:

Datos: *m = 4500 Kg; h = 8 m; t = 30 s*.

Como en el ejercicio anterior, $W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$.

$P = W/t = m \cdot g \cdot h/t$.

$$\boldsymbol{P} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{4500 \cdot 9{,}8 \cdot 8}{30} = \mathbf{11760\ W = 16\ CV}$$

20. Solución:

Datos: *m = 1500 Kg; P = 100 CV = 73500 W; t = 6 s*.

En este caso el trabajo (*W*) que va a desarrollar el motor se va a emplear en variar la energía cinética (ΔE_c). Como $v_0 = 0 \rightarrow E_{ci} = 0$.

$$W = \Delta E_c = E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \rightarrow v^2 = \frac{P \cdot 2 \cdot t}{m} = \frac{73500 \cdot 2 \cdot 6}{1500} = 588 \rightarrow v = \sqrt{588} = 24{,}25\ m/s$$

21. Solución:

ºC	ºF	ºK
-273	-459,4	0
-15	**5**	258
0	32	**273**
25	77	298
50	**122**	323
78	172,4	**351**
100	212	373

22. Solución:

$\boldsymbol{Q} = m \cdot C_e \cdot (T_F - T_i) = 3{,}4 \cdot 1 \cdot (100 - 10) = \mathbf{306\ Kcal} = \mathbf{1279{,}08\ KJ}$.

23. Solución:

Datos: $m_{ced} = 400$ g; $T_2 = 80$ ºC; $m_{gan} = 200$ g; $T_1 = 20$ ºC; $C_{e\ agua} = 1$ Kcal/Kg·ºC.

Se cumple que $Q_{cedido} = Q_{ganado}$, por tanto

$m_{ced} \cdot C_e \cdot (T_1 - T_F) = m_{gan} \cdot C_e \cdot (T_F - T_2)$

$0{,}4 \cdot 1 \cdot (80 - T_F) = 0{,}2 \cdot 1 \cdot (T_F - 20)$

$32 - 0{,}4T_F = 0{,}2T_F - 4$

$36 = 0{,}6T_F \rightarrow \boldsymbol{T_F} = \mathbf{60\ ºC}$.

24. Solución:

Datos: $m_{agua} = 3\ l = 3$ Kg; $T_{agua} = 10$ ºC; $m_{Hierro} = 3$ Kg; $T_{Hierro} = 150$ ºC; $C_{e\ agua} = 1$ Kcal/Kg·ºC; $C_{e\ Hierro} = 0{,}119$ Kcal/Kg·ºC.

$Q_{cedido} = 3 \cdot 0{,}119 \cdot (150 - T_F)$

$Q_{ganado} = 3 \cdot 1 \cdot (T_F - 10)$

$Q_{cedido} = Q_{ganado}$.

$3 \cdot 0{,}119 \cdot (150 - T_F) = 3 \cdot 1 \cdot (T_F - 10)$

$53{,}55 - 0{,}357T_F = 3T_F - 30$

$83{,}55 = 3{,}357T_F \rightarrow \boldsymbol{T_F} = \mathbf{24{,}89\ ºC}$.

25. Soluciones:

Bombilla *(eléctrica → radiante);* ***estufa de gas*** *(química → térmica);* ***motor de un coche*** *(química → mecánica);* ***altavoz*** *(eléctrica → sonora);* ***panel solar agua caliente*** *(radiante → térmica);* ***aerogenerador*** *(mecánica → eléctrica);* ***micrófono*** *(sonora → eléctrica);* ***motor eléctrico*** *(eléctrica → mecánica);* ***fuegos artificiales*** *(química → radiante);* ***carbón en un caldera*** *(química → térmica);* ***dinamo de una bici*** *(mecánica → eléctrica)*

26. Soluciones:

a) Calefactor; b) Ventilador; c) Bombilla; d) Relé o zumbador; e) Altavoz; f) Batería.

27. Soluciones:

a) Potencial elástica; b) Cinética; c) Radiante; d) Eléctrica.