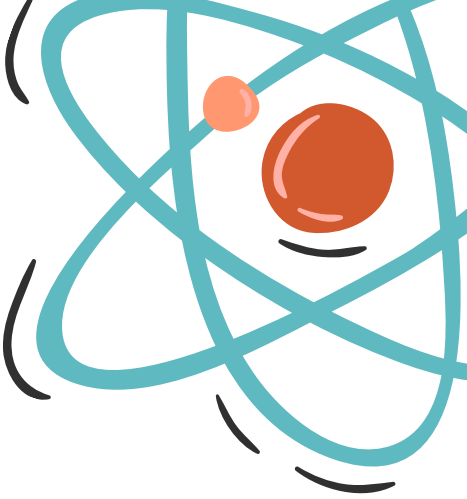
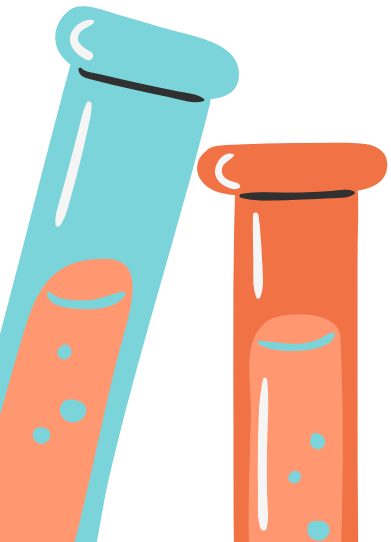


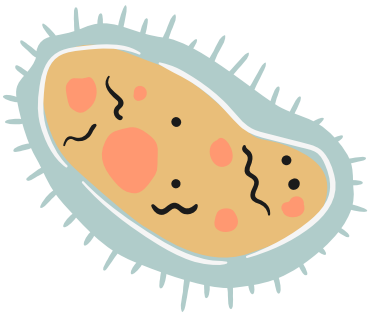
Ámbito Científico-Tecnológico

MÓDULO I ESPAD

CEPA Altomira (Tarancón)

Curso 2023/24





PARTE 1: Clasificación de los números. Operaciones básicas. La célula.

- **Tema 1**: Números naturales y enteros. Operaciones básicas.
- **Tema 2**: Números fraccionarios y decimales. Operaciones básicas.
- **Tema 3**: La célula.

PARTE 2: Abstracción del Álgebra. Concepto de entidad viva.

- **Tema 4**: Proporcionalidad. Introducción al lenguaje algebraico.
- **Tema 5**: Los seres vivos.

PARTE 3: La investigación en ciencia. la energía. Dispositivos digitales.

- **Tema 6**: Investigación científica.
- **Tema 7**: La energía.
- **Tema 8**: Dispositivos digitales.

PARTE 1
TEMA 1. NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS. OPERACIONES BÁSICAS.

ÍNDICE

1. LOS NÚMEROS NATURALES 2
   1.2. Sistema de numeración decimal 2
   1.3. Valor posicional 2
   1.4. Lectura y escritura de números naturales 3
   1.5. COMPARACIÓN DE NÚMEROS NATURALES. 3
2. LOS NÚMEROS ENTEROS. 4
   2.1. Representación de los números enteros en la recta numérica. 4
   2.2. Valor absoluto de un número entero. 5
   2.3. Comparación y ordenación de números enteros. 5
   2.4. Opuesto de un número entero. 5
3. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS. PROPIEDADES. 6
   3.1. Suma de números naturales 6
      3.1.1. Propiedades de la suma 7
   3.2. Resta de números naturales 7
   3.3. Suma de números enteros. 9
   3.4. Resta de números enteros. 9
4. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS. 11
   4.1. Multiplicación de números naturales. 11
      4.1.1. Propiedades de la multiplicación. 12
      4.1.2. Casos especiales en la multiplicación. 13
   4.2. Multiplicación de números enteros. 14
5. DIVISIÓN DE NÚMEROS. 14
   5.1. División de números naturales. 14
   5.2. División de números enteros. 17
6. PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES. 17
7. UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA Y EL ORDENADOR PARA LA REALIZACIÓN DE OPERACIONES. 19
8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS. 19
9. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO NATURAL. 22
10. DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL. 22
   10.1. Cálculo de divisores de un número natural. 22
   10.2. Criterios de divisibilidad. 23
11. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS. 24
12. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS. 25
13. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS. 25
14. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS. 26

1. LOS NÚMEROS NATURALES

Los **números naturales** son los que utilizamos en la vida cotidiana para contar u ordenar y pertenecen al conjunto de **números enteros positivos**, por lo tanto, no tienen *parte decimal* y no son *fraccionarios*, y se encuentran a la derecha del cero en la *recta numérica*.

El conjunto de los *números naturales* se representa por la letra **N** y está formado por: **N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}**. No existe una cantidad total o final de números naturales, por lo tanto, los números naturales son infinitos.

Los *números naturales* se pueden representar en una línea recta que llamamos **recta numérica**, y siempre se ordenan de menor a mayor.

1.2. Sistema de numeración decimal

El sistema de numeración que utilizamos actualmente es el *sistema de numeración decimal*, que fue introducido en Europa por los árabes, en el siglo XI, procedente de la India, donde se desarrolló desde el siglo VI a.C.

El **sistema de numeración decimal** permite escribir cualquier número con diez símbolos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Estos diez símbolos se llaman **cifras** o **dígitos**. En un número, el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa: *unidades, decenas, centenas, unidades de millar, decenas de millar...*
Este sistema se llama **decimal** porque se forman grupos de diez:

- Las **unidades** son elementos sin agrupar.
- Las **decenas** son grupos de 10 *unidades*.
- Las **centenas** son grupos de 10 *decenas*.
- Las **unidades de mil** son grupos de 10 *centenas*.
- Las **decenas de mil** son grupos de 10 de *unidades de millar*.
- Las **centenas de mil** son grupos de 10 *decenas de millar*…

1.3. Valor posicional

En nuestro *sistema de numeración decimal*, cada **dígito** o **cifra** tiene un **valor** distinto, según la posición que ocupa.

7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°
U MI	CM	DM	UM	C	D	U
1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1

Por ejemplo, el número 4353, está compuesto de 3 unidades, 5 decenas, 3 centenas y 4 unidades de millar. Es decir: $4353 = 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3$.

1.4. Lectura y escritura de números naturales

Lo primero que debes saber es que al **leer un número** lo hacemos de *izquierda a derecha*. Para **escribir el nombre de un número**, lo separamos en *clases*. Es decir, en grupos de tres cifras, de *derecha a izquierda*. Luego se nombran de *izquierda a derecha* comenzando por las unidades correspondientes a la clase de mayor valor, continuando con la de menor valor y así sucesivamente hasta que termine con el orden de las unidades simples. Por ejemplo:

Billones			Millares de Millón (mil)			Millones			Millares (mil)			Unidades Simples		
CB	DB	UB	CmM	DmM	UmM	CM	DM	UM	Cm	Dm	Um	C	D	U
		8	7	0	3	2	0	0	0	1	0	0	0	5

Ocho billones, setecientos tres mil, doscientos millones, diez mil, cinco.

- Los *números hasta el 30* se escriben con una sola palabra, incluyendo las decenas, por ejemplo: 11 = once ; 16 = dieciséis ; 23 = veintitrés ; 28 = veintiocho; …
- Los *números del 31 al 99* se escriben con tres palabras (menos las decenas netas como: 20, 30, 40, 50, …) , por ejemplo: 31 = treinta y uno; 45 = cuarenta y cinco; 76 = setenta y seis; 99 = noventa y nueve.
- Las centenas se escriben con una sola palabra, por ejemplo: 100 = cien ; 200 = doscientos; 300 = trescientos , ...

Veamos dos ejemplos más:

129 368 Se lee: *Ciento veintinueve mil trescientos sesenta y ocho.*

Millares			Simples		
CM	DM	UM	C	D	U
1	2	9	3	6	8

Trescientos diez mil ochenta y nueve. Se escribe: 310 089

Millares			Simples		
CM	DM	UM	C	D	U
3	1	0	0	8	9

1.5. Comparación de números naturales.

Si dos números tienen el mismo número de cifras, habrá que ir comparando éstas de *izquierda a derecha*. El que tiene mayor la primera cifra de la izquierda es el mayor. En caso de que sean iguales, se compara la segunda y así sucesivamente.

Por ejemplo, si tenemos 4.692 y 4.685, vemos que los dos tienen 4 unidades de millar, que los dos tienen 6 centenas, pero el primero tiene 9 decenas y el segundo 8 decenas. Por tanto, será

mayor 4.692.

Si un número tiene más cifras que otro, éste será mayor, además, para expresar matemáticamente que un número es **mayor que otro**, se emplea el símbolo **>**. Para expresar matemáticamente que un número es **menor que otro**, se emplea el símbolo **<**.

Si coinciden en todas sus cifras, se dice que los dos números son **iguales**, y se expresa con el símbolo **=**.

Veamos algunos ejemplos:

- 2.567 es mayor que 384 y se escribe así: 2.567 > 384.
- 4.685 es menor que 5.432 se escribe así: 4.685 < 5.432.

Actividad 1

Ordena los siguientes números de menor a mayor:

a) 56.505 b) 78.549 c) 45.693 d) 54.956

2. LOS NÚMEROS ENTEROS.

Hay muchas situaciones que no se pueden expresar utilizando sólo los *números naturales*:

- Cuando en invierno decimos que la temperatura en cierto lugar es de 7 grados bajo cero.
- Si tenemos en el banco 2.000 euros y nos cobran un recibo de 3.000.
- Cuando decimos que cierto personaje nació en el año 546 antes de Cristo.

Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de *números naturales*, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado *números enteros*.

El conjunto de los **números enteros** está formado por los *números naturales*, *sus opuestos* (negativos) y el *cero*. Se representa por la letra **Z** y está formado por: **Z = {… ,-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}**.

A la izquierda del cero se encuentran los *enteros negativos* y a su derecha, los *enteros positivos*. El número cero también es un entero que no se considera ni positivo ni negativo.

2.1. Representación de los números enteros en la recta numérica.

Para representar los números enteros en la recta numérica procedemos así:

- Trazamos una línea recta y situamos en ella el 0. El 0 divide a la recta en dos semirrectas.
- Dividimos cada una de las semirrectas en partes iguales.
- Situamos los números enteros: los *enteros positivos* a la derecha del cero y los *enteros negativos* a la izquierda del cero.

Es decir, quedaría de la siguiente forma:

Actividad 2

Sitúa en la recta numérica los siguientes números enteros: -3, +2, +5, +9, -6, +11, -11.

2.2. Valor absoluto de un número entero.

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo. El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales. Ejemplos: |+10| = 10; |-5| = 5.

Actividad 3

Responde a estas preguntas:

a) Si el valor absoluto de un número es 4, ¿qué número puede ser?
b) Si el valor absoluto de un número es 5 y sabes que está a la izquierda del 0, ¿qué número es?
c) ¿Qué número tiene valor absoluto 7 y está situado entre -6 y-8?

2.3. Comparación y ordenación de números enteros.

A la hora de comparar dos números enteros comprobaremos que:

- Si los dos números enteros son positivos, el mayor es el que tenga *mayor valor absoluto*.
- Si los dos números enteros son negativos, el mayor es el que tenga *menor valor absoluto*.
- Si uno de los números enteros es positivo y el otro es negativo, el *mayor es el positivo*.

2.4. Opuesto de un número entero.

Observa que 4 y –4 se encuentran a la misma distancia de 0. Son simétricos respecto al 0. Tienen el mismo valor absoluto, pero distinto signo. En conclusión, podemos decir que el **opuesto** de un número entero es aquel que tiene el mismo *valor absoluto* pero distinto signo.

Actividad 4

Escribe los opuestos de los siguientes números:

a) Opuesto de +4 =
b) Opuesto de – 6 =
c) Opuesto de – 5 =
d) Opuesto de +3 =
e) Opuesto de 0 =
f) Opuesto de – 8 =

3. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS. PROPIEDADES.

3.1. Suma de números naturales

La **suma** es la *operación matemática* que resulta de agrupar varias cantidades en una sola. También se conoce la *suma* como **adición**. Las cantidades que se suman se llaman **sumandos** y el resultado **suma o total**. Es decir, la suma de dos números naturales *a* y *b* es:

$$a + b = c$$

donde *a* y *b* son los *sumandos* y el resultado *c* es la *suma*. Para su notación se emplea entre los sumandos el signo **+** el cual se lee "más".

La *suma* de dos números naturales de una sola cifra se halla mentalmente, una vez que se han aprendido las **tablas de sumar**. Ejemplos: 5 + 4 = 9; 7 + 6 = 13.

Si queremos realizar la suma de números naturales de varias cifras, tendremos que seguir el siguiente procedimiento:

1. Se colocan los números unos debajo de otros, de modo que las unidades queden debajo de las unidades, la decenas debajo de las decenas, etc.
2. Se suman las unidades de la primera columna, si el resultado es un número de una cifra, se escribe al pie de la columna.
3. Si el resultado de la suma de las unidades tiene más de una cifra, se escribe al pie de la columna únicamente la cifra de las unidades, añadiendo la decenas que resulten, a la columna siguiente, procediendo a continuación de igual forma.

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente suma:

257 + 386.

c. d. u. 2 5 7 + 3 8 6 ————	Primero colocamos los números en columna de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas…	
1 2 5 7 + 3 8 6 ———— 3	Empieza sumando la columna de las unidades: 7 + 6 = 13	En la práctica decimos 7 + 6 son 13. Escribo el 3 y me llevo 1
1 1 2 5 7 + 3 8 6 ———— 4 3	Este número (13) es mayor que 10, por lo tanto escribes el 3 debajo de la columna de las unidades y el 1 (es la llevada) lo escribes encima de la siguiente columna. Ahora sumas la siguiente columna, sin olvidarte de la llevada: 1 + 5 + 8 = 14 Este número también tiene llevada. Escribes el 4 debajo de la columna de las decenas y el 1 escríbelo encima de la siguiente columna.	Decimos: 1 + 5 + 8 son 14. Escribo 4 y me llevo 1

1 1 2 5 7 + 3 8 6 6 4 3	**Ahora solo queda sumar la última columna:** **1 + 2 + 3 = 6** **Solo te queda escribir ese número debajo de la columna.** **Y el resultado de la suma es 643.**	**Decimos: 1 + 2 + 3 son 6.** **Escribo el 6 y hemos terminado.**

3.1.1. Propiedades de la suma

La *suma*, definida en el conjunto de los números naturales, tiene las siguientes propiedades:

- **Cerrada.** La suma de dos números naturales siempre es otro número natural.

  Ejemplo: 5 +4=9.
- **Conmutativa**. El orden de los sumandos no altera la suma.

  Ejemplo: 5 + 4 = 4 + 5 = 9.
- **Elemento neutro**. El 0 es el elemento neutro aditivo en el conjunto de los números naturales.

  Ejemplos: 7 + 0 = 7; 0 + 12 = 12.
- **Asociativa**. El orden de las sumas parciales en una operación con más de dos sumandos no afecta el resultado de la operación.

  Ejemplo: (3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7) = 15.

Actividad 5

Realiza las siguientes sumas:

a) 6570 + 167 + 8658 = 15395

b) 563132 + 54006 + 66707 = 683845

c) 4657 + 506 + 568 + 70 = 5801

3.2. Resta de números naturales

La **resta** o **sustracción** de dos números naturales es la operación que quita la cantidad del número menor (**sustraendo**) al número mayor (**minuendo**). Es la operación inversa de la suma y nos permite calcular la *diferencia* entre dos números naturales, Es decir la *resta* de dos números naturales *a* y *b* es:

a – b = c

donde *a* es el minuendo y *b* es el *sustraendo* y el resultado *c* es la *resta* o *diferencia*. Para su notación se emplea entre los sumandos el signo –. el cual se lee "menos". Siempre que hagamos una resta, se debe empezar por la izquierda e ir haciendo las restas que van apareciendo.

El resultado de *restar* dos números naturales no siempre es otro *número natural*. Ejemplos: 7 – 5 = 2; 5 – 7 = - 2.

Por lo tanto, la *resta* no cumple la propiedad *conmutativa*. Tampoco cumple la propiedad

asociativa. Ejemplos: 15 – 5 – 7 – 1 = 2; 15 – 5 – (7 – 1) = 10 – 6 = 4.

La *resta* de dos números naturales de una sola cifra, se halla mentalmente, teniendo en cuenta que el signo del resultado de la resta, dependerá de si el *minuendo* es mayor o menor que el *sustraendo*.

Si queremos realizar la *resta* de números naturales de dos o más cifras, tendremos que seguir el siguiente procedimiento:

1. Se colocan el minuendo y el sustraendo uno debajo de otro, de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas…, etc.
2. Comenzamos restando de derecha a izquierda las unidades, luego las decenas, centenas, miles y así sucesivamente.
3. Si el minuendo es mayor que el sustraendo, el resultado de la resta se escribe al pie de la columna. Si el minuendo es menor que el sustraendo, se agregan al minuendo diez unidades, y se realiza la resta. Para compensar, se añade una unidad a la cifra del sustraendo de la siguiente columna o se resta una unidad a la cifra del minuendo de la siguiente columna.
4. Se seguirá restando de la misma forma hasta obtener el resultado final al que llamamos resta. Ejemplo: vamos a realizar la siguiente resta: 958 – 671.

c.d.u. 9 5 8 - 6 7 1	**Primero colocamos el minuendo y el sustraendo en columna de forma que coincidan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas…**	**En la práctica utilizaremos el método americano.**
9 5 8 - 6 7 1 7	**Comenzamos restando las unidades: a 8 unidades le quitamos 1 unidad y nos quedan 7 unidades.**	**De 1 a 8 van 7. Colocamos el 7 debajo de las unidades.**

8 ^{1}5 8 - 6 7 1 8 7	**Continuamos con las decenas: a 5 decenas no le podemos quitar 7 decenas.** **Tomamos una centena y la transformamos en 10 decenas, con lo que tenemos 15 decenas. A 15 decenas le quitamos 7 decenas y nos quedan 8 decenas.**	**Mentalmente se pone un 1 delante del 5. Del 7 al 15 van 8 y me llevo 1. Colocamos el 8 debajo de las decenas.** **Al quitarle una centena, la centena nos ha quedado en 8.**
8 ^{1}5 8 - 6 7 1 2 8 7	**Ahora a 8 centenas le quitamos 6 centenas. Nos quedan finalmente 2.**	**El resultado final es 287.**

$\begin{array}{r} 9\ {}^{1}5\ 8 \\ -\ \ 6^{1}\ 7\ 1 \\ \hline 2\ 8\ 7 \end{array}$	**En vez de quitar una centena al 9, podemos sumarle 1 al 6. Por tanto, dejamos las 9 centenas como estaban al principio. Decimos: 6 y 1 que nos llevamos son 7. De 7 a 9 van 2.**	**Esta forma de realizarlo es conocida como el método austriaco.** **El resultado final es el mismo, 287.**

Actividad 6

Realiza las siguientes restas:

a) 528 - 324 =

b) 11929 – 8974 =

3.3. Suma de números enteros.

Para sumar números enteros **de igual signo**, se suman sus *valores absolutos* y se pone el signo de los sumandos. Date cuenta que:

- La suma de *dos números enteros negativos* es otro número *entero negativo*.
- La suma de *dos números enteros positivos* es otro número *entero positivo*.

Para sumar números enteros **de distinto signo**, se restan sus valores absolutos, y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Veamos unos ejemplos:

a) – 7 + (+12) = +5. Porque el de mayor valor absoluto es positivo (+12).

b) 11 + (-16) = -5. Porque el de mayor valor absoluto es negativo (-16).

Si lo que tenemos es una suma de **varios números enteros de distinto signo**, lo que haremos será:

a) Se suman separadamente los números positivos, por un lado y los negativos por el otro.

b) Se suman el número positivo y el número negativo obtenido.

Ejemplo: Vamos a calcular el resultado de esta suma:

(+4) + (-2) + (+3) + (+5) + (-6) = (+12) + (-8) = +4

3.4. Resta de números enteros.

La **resta** de números enteros se obtiene *sumando al minuendo el opuesto del sustraendo*. De esta forma, las restas se convierten en sumas.

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplos: +8 - (-6) = +8 + (+6) = +14; -16 - (-8) = -16 + (+8) = - 8.

La resta de dos números enteros es otro número entero. Ejemplo: 10 – (– 5) = 15. La resta de dos números enteros no cumple la propiedad conmutativa: a – b ≠ b – a.

Ejemplo: 5 – 2 ≠ 2 – 5.

Tanto para la suma o resta de números enteros es importante seguir la *regla de los signos*:

+ con + es +

+ con - es -

- con + es -

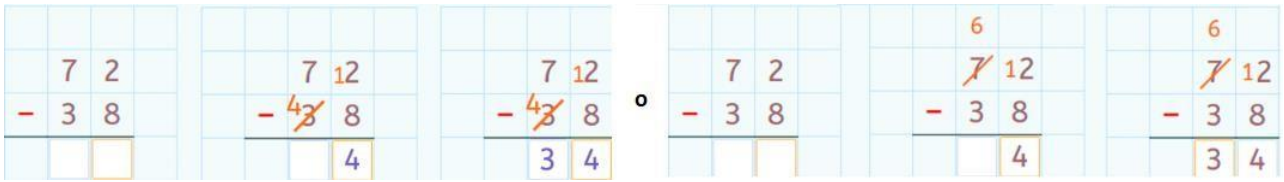
- con - es +

Una **resta de números enteros de una cifra** se puede resolver como si se tratara de una suma, pero con una particularidad: el símbolo de la resta le cambia el signo a la cifra que le sigue. Es decir, si el número que se resta es positivo lo convierte en negativo y si el número que se resta es negativo lo convierte en positivo.

Ejemplo: +7 – (+4) – (–2) = 7 – 4 + 2 = 5.

La **suma o resta de números enteros de dos o más cifras** se realiza de forma similar a como se realiza con *números naturales*.

Ejemplo:



Actividad 7

Calcula las siguientes restas:

a) (- 5) – (+ 7) =

b) (+ 4) – (- 6) =

c) (- 3) – (- 7) =

d) (+4) – (+2) =

e) (+4) – (+6) =

Actividad 8

Resuelve estas restas:

a) 12 - 5 =

b) 12 - (-5) =

c) -12 - 5 =

d) -12 - (-5) =

Actividad 9

Realiza estas operaciones:

a) (+6) – (-2) + (-5) – (+4) =

b) (-5) – (-5) – (+7) + (-6) =

c) (-1) – (-10) + (+5) – (+7) =

d) 14 - (12 + 2) =

e) 17 - (-9 - 14) =

f) -14 + (6 - 13) =

g) 2 + (7 – 3) – (8 – 4) =

h) -1 – (2 – 5) + (7 – 4) =

4. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS.

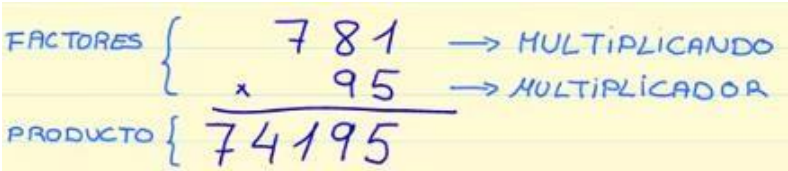
4.1. Multiplicación de números naturales.

Una **multiplicación** es una suma de varios sumandos iguales.

Ejemplo: 15 + 15 + 15 + 15 = 60 → 15 x 4 = 60.

Los términos de una multiplicación son los siguientes:

- **Factores**: Son los números que se multiplican. Dentro de los factores encontramos:
  - *Multiplicando*: es el número que se encuentra arriba en la multiplicación.
  - *Multiplicador*: es el número que se encuentra debajo del multiplicando.
- **Producto**: Es el resultado de la multiplicación y se sitúa en la parte inferior de la multiplicación.



Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor. El signo de esta operación es "**x**" o "**·**" y se lee "por".

En la calculadora la tecla que usamos para multiplicar es la "x". En el ordenador la tecla que se usa para multiplicar es "*****".

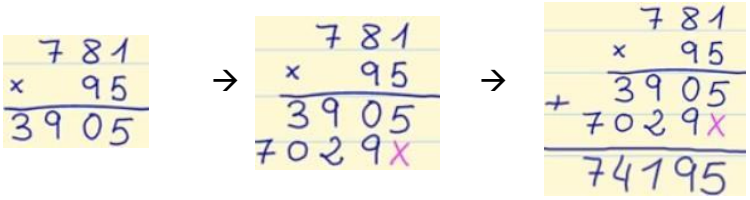
Para multiplicar **dos números naturales de una cifra**, basta con aprenderse las **tablas de multiplicar**.

Para multiplicar **dos números naturales de dos o más cifras**, seguiremos los siguientes pasos:

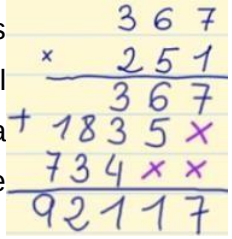
1º- Multiplicar las unidades del multiplicador por el multiplicando y el resultado escribirlo en la fila de abajo.

2º- Multiplicar las decenas del multiplicador por el multiplicando y el resultado escribirlo en la fila de abajo pero desplazado una posición a la izquierda. Y seguir así, con el resto de valores posicionales.

3º- Sumar todos los productos.

Ejemplo: 

Si el *multiplicador* es de tres cifras, el resultado de la multiplicación de las centenas se escribirá desplazado dos posiciones hacia la izquierda. Si el multiplicador tuviera más de tres cifras, se continuaría de la misma forma hasta agotar todas las cifras de los diversos órdenes del multiplicador. La suma de los productos parciales nos da el producto total.



4.1.1. Propiedades de la multiplicación.

- **Conmutativa**. El orden de los factores no altera el producto: $a \cdot b = b \cdot a$.

  Ejemplo: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$.

- **Asociativa**. Para multiplicar dos o más factores se pueden asociar dos de ellos y el resultado no varía: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

  Ejemplo: $(5 \cdot 2) \cdot 7 = 5 \cdot (2 \cdot 7) = 70$.

- **Distributiva**. El producto de un número por una suma, es igual que la suma de los productos del número por los sumandos: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

  Ejemplo: $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$.

  Esta propiedad también se puede aplicar, si en vez de una suma, tenemos una resta:

  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

  Ejemplo: $4 \cdot (7 - 2) = 4 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 28 - 8 = 20$.

  La operación inversa a la distributiva es *sacar factor común*:

  Ejemplos:

  a) $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 5 \cdot (4 + 3)$.

  b) $3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 3 \cdot (7 - 2)$.

  c) $4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 4 \cdot (7 - 3 + 5)$.

  d) $3 \cdot a + 5 \cdot a = (3 + 5) \cdot a = 8 \cdot a$.

- **Elemento neutro**. Es el número uno (1), porque cualquier número multiplicado por 1, da el mismo resultado.

4.1.2. Casos especiales en la multiplicación.

- **Por la unidad seguida de ceros**: Se añaden a la derecha del número tantos ceros como números hay.

  Ejemplos: 8 · 100 = 800; 28 · 1000 = 28000.

- **Multiplicación de números que acaban en ceros**: Se multiplican los números sin los ceros finales y después se añaden al resultado los ceros que tenían entre los dos.

  Ejemplo: 3200 · 40 = 128000.

- **Ceros intermedios en el multiplicador**: Si el multiplicador tiene ceros intermedios no se escriben los productos parciales, pues estos son cero, pero nos desplazamos hacia la izquierda tantos lugares como ceros intermedios tuviesen. Veamos unos ejemplos:

```
   2.5461
     x405
  -------
   127305
 101844
 --------
 10311705
```

Primero hemos multiplicado por cinco y posteriormente, en vez de multiplicar por el cero, lo que hacemos es multiplicar directamente por el cuatro pero desplazando los números de la segunda fila de la multiplicación dos lugares a la izquierda en vez de uno.

```
   2.5461
    x4005
  -------
   127305
 101844
 ---------
 101971305
```

Si los ceros intermedios fueran dos en vez de uno desplazaríamos la segunda fila de la multiplicación tres lugares a la izquierda.

Actividad 10

Saca factor común:

a) 3·b + 5·b – 2·b =

b) 6 ·4 + 3 ·4 + 2 ·4 =

c) 6·a + 6·b =

d) 2·a + 2·c =

Actividad 11

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) 2306 x 305 =

b) 7650 x 400 =

c) 3785 x 501 =

Actividad 12

Completa las siguientes expresiones:

a) 425 x 100 = _____

b) 632 x_____= 6320

c)_____x 1000 = 35000

4.2. Multiplicación de números enteros.

Para hallar el **producto de dos números enteros** hay que multiplicar sus *valores absolutos*. El signo del resultado del producto es positivo cuando ambos números tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos diferentes. Es lo que llamamos la **regla de los signos**:

+ · + = +

– · – = +

+ · – = –

– · + = –

Ejemplos:

(+5) · (+3) = +15

(-5) · (-3) = +15

(+5) · (-3) = -15

(-5) · (+3) = -15

Actividad 13

Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) (-4) · (+2) =

b) (+3) · (+7) =

c) (+3) · (-5) =

d) (-5) · (-12) =

e) 2 · (-3) =

f) 4 · (-5) · 2 =

g) 3 · (-3) · (-7) =

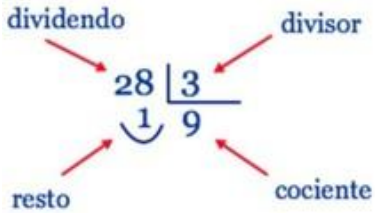
h) (-2) · (-5) · (-9) =

5. DIVISIÓN DE NÚMEROS.

5.1. División de números naturales.

La división es la operación *inversa* a la *multiplicación*. **Dividir** es repartir en partes iguales una cierta cantidad de elementos. Los términos de la división son los siguientes:

- **Dividendo**. Indica el número de elementos que hay que repartir.
- **Divisor**. Indica el número de grupos en los que voy a repartir esos elementos.
- **Cociente**. Indica el número de elementos que debe tener cada grupo.
- **Resto**. Indica los elementos que sobran de dicho reparto.



Para dividir números naturales, el *dividendo* debe ser *mayor que el divisor*, y éste debe ser distinto de cero. Si el *resto* es cero 0, la división es **exacta**, en el caso contrario la división es **inexacta** o **entera**. Se debe cumplir siempre que el resto debe ser menor que el divisor.

En matemáticas, el símbolo de la división es el signo (÷), dos puntos (:) o barra oblicua (/). El signo para la división se ubica entre el dividendo y el divisor.
Ejemplos: 10 : 5 = 2, resto cero → división exacta; 7 : 2 = 3, resto 1 → división inexacta.

En toda división se cumple la siguiente propiedad fundamental:

dividendo = divisor · cociente + resto

Las principales **propiedades de la división** son las siguientes:

- **No es una propiedad interna**, porque el resultado de dividir dos números naturales no siempre es otro número natural.
  Ejemplo: 2 : 6 no da un número natural
- **Propiedad no conmutativa**. Porque no se puede cambiar el orden de sus términos, porque cambia el resultado.
  Ejemplo: 2 : 6 ≠ 6 : 2.
- **Dividir entre uno**. Todo número dividido entre 1, da el mismo número.
  Ejemplo: 49 : 1 = 49.
- **División del cero**. El 0 entre cualquier número diferente de 0, da 0.
  Ejemplo: 0 : 7 = 0.

Procedimiento para realizar una división:

- **Dividir cualquier número entre un número de una cifra.**

- Si el número no es muy grande y nos sabemos las tablas de multiplicar, la división es bastante fácil. Tan solo tenemos que buscar el mayor número que multiplicado por el divisor no sea mayor que el dividendo.

Ejemplos: 48 : 8 = 6, porque 8 · 6 = 48; 38 : 5 = 7, porque 7 · 5 = 35, que es el número más cercano al dividendo. En este caso el resto es 3.

- Si el número es más grande, procederemos del siguiente modo:

1º- Se comprueba de izquierda a derecha si la primera cifra del dividendo sea mayor que la cifra del divisor. Si no es así, se tomará una cifra más del dividendo.

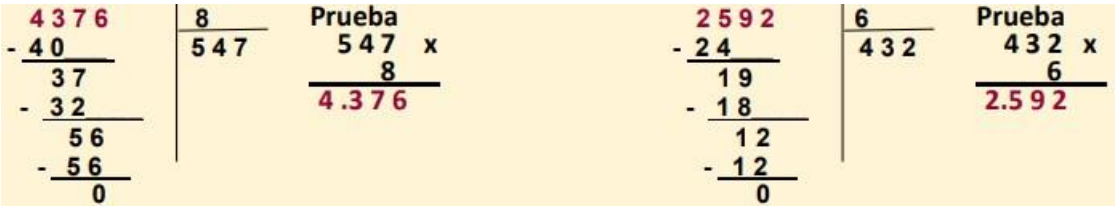
2º- Calculamos la primera cifra del cociente, probando en primer lugar la cifra que resulta de dividir la primera o las dos primeras cifras del dividiendo por la cifra del divisor. Si el producto de esta cifra por el divisor es mayor que el dividendo, se prueba por otra menor en una unidad, hasta obtener un producto menor.

3º- Se multiplica la cifra obtenida en el cociente por el divisor y el resultado se resta de las cifras separadas del dividendo. Se baja la siguiente cifra del dividendo y se repite el mismo

procedimiento.

4º- Si alguna de las divisiones no se puede realizar, por dar un número menor que el divisor, entonces se pone un cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividiendo y se continúa dividiendo hasta terminar todas las cifras del dividendo.

5º- Se comprueba la propiedad fundamental de la división, para comprobar que la división se ha realizado correctamente.

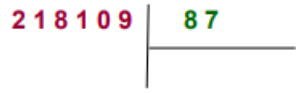


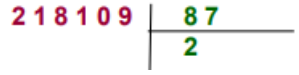
- **Dividir cualquier número entre un número de varias cifras**.

Procederemos del siguiente modo:

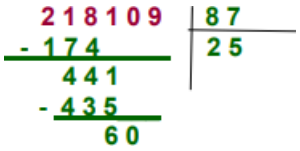
1º- En el dividendo, se separan de izquierda a derecha, tantas cifras como tenga el divisor o alguna más, de modo que se forme un número igual o mayor que el divisor.

2º- A continuación, calculamos la primera cifra del cociente, probando en primer lugar la cifra que resulta de dividir la primera o las dos primeras cifras del dividiendo por la primera cifra del divisor. Si el producto de esta cifra por el divisor es mayor que el dividendo, se prueba por otra menor en una unidad, hasta obtener un producto menor.

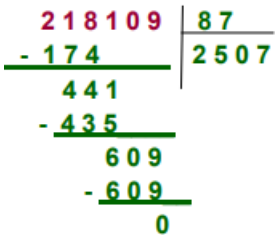




3º- Se multiplica la cifra obtenida en el cociente por el divisor y el resultado se resta de las cifras separadas del dividendo. Se baja la siguiente cifra del dividendo y se repite el mismo procedimiento.



4º- Si alguna de las divisiones no se puede realizar, por dar un número menor que el divisor, entonces se pone un cero en el cociente y se baja la siguiente cifra del dividiendo y se continúa dividiendo hasta terminar todas las cifras del dividendo.



5º- Se comprueba la propiedad fundamental de la división, para comprobar que la división se ha realizado correctamente.

$$2507 \cdot 87 = 218109$$

<u>Ejemplo resuelto:</u>

Para hacer una excursión de fin de curso se han apuntado 249 personas y vamos a contratar autobuses de 55 plazas. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?

249 : 5 5 = 4 y el resto es 29

Según la división se llenarían 4 autobuses, quedando aún 29 personas, por lo que nos hará falta

un autobús más. Por tanto, son necesarios 5 autobuses.

Actividad 14

Resuelve los siguientes problemas.

a) Un grifo deja salir 15 litros de agua por minuto, ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un depósito de 675 litros?

b) ¿Cuántos años son 5475 días? Se considera que un año tiene 365 días.

c) Queremos guardar 768 latas de refresco en cajas de 24 latas cada una. ¿Cuántas cajas son necesarias?

d) María, Antonio y Ana coleccionan sellos. Su tío tiene 235 para repartir entre los tres. ¿Cuántos puede dar a cada uno? ¿Sobrará algún sello?

Actividad 15

Realiza las siguientes divisiones:

a) 49067 : 31

Cociente:_____ Resto: _____

b) 34597 : 475

Cociente:_____ Resto: _____

5.2. División de números enteros.

Para **dividir dos números enteros** se dividen sus *valores absolutos*. El cociente tiene signo positivo si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo y signo negativo si tienen diferentes signos. Se sigue la misma **regla de los signos** que para el producto.

+ : + = +

– : – = +

+ : – = –

– : + = –

6. PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES.

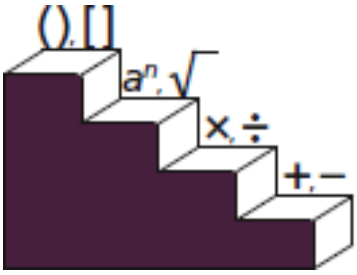
La **prioridad de operaciones** son una serie de reglas que todos debemos seguir para obtener el mismo resultado en las mismas operaciones. Siempre que tengamos operaciones combinadas de *sumas*, *restas*, *multiplicaciones* y *divisiones*, hay que realizarlas en el orden siguiente:

1º.- Paréntesis y corchetes de dentro hacia fuera.

2º.- Potencias y raíces.

3º.- Multiplicación y división en el orden en que aparecen (de izquierda a derecha).

4º.- Suma y resta en el orden en que aparecen (de izquierda a derecha).



Hacer operaciones con números enteros requiere prestar especial atención a la presencia del signo negativo. Cuando hay un **signo –** situado delante de un paréntesis, se cambia el signo de lo que hay dentro del paréntesis utilizando las *reglas de los signos*.

Ejercicio resuelto:

[15 - (8 - 10 : 2)] · [5 + (3 · 2 - 4)] =

Primero resolvemos las potencias, productos y cocientes de los paréntesis.

[15 - (8 - 5)] · [5 + (6 - 4)] =

Realizamos las sumas y restas de los paréntesis.

[15 - 3] · [5 + 2] =

Operamos en los corchetes.

2 · 7 =

Multiplicamos:

84

Actividad 16

Resuelve las siguientes operaciones:

a) 6 · (- 3) + 5 · (- 2) + (- 4) · (- 5) =

b) -2 · [-3 + 4 · (- 5 - 2)] =

c) 2 – 3 · [(5 – 2) · (3 – 6) + 8] =

d) 20 – 9 · 2 – (- 5) · (- 2) =

e) 2 · (3 + 5) – (8 – 1) + (-1) · (3 + 1) – 8 =

f) 9 : [6 : (- 2)] =

g) [(+7) · (- 20)] : (+10) =

h) (+4) · (1 – 9 + 2) : (- 3) =

i) [35 – (6 – 34) + (8 – 22)] : 7 =

j) 7 · [6 – (- 5)] – 4 · (5 – 3) =

7. UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA Y EL ORDENADOR PARA LA REALIZACIÓN DE OPERACIONES.

La **calculadora científica** realiza los cálculos siguiendo la prioridad de operaciones, además contiene teclas de paréntesis, teclas para introducir una fracción...etc. En cambio, las calculadoras *no científicas o estándares* no respetan el orden de las operaciones, por lo que para su utilización debes utilizar la tecla de memoria.

Al teclear un número de más de tres cifras, no pongas nunca el punto después de las unidades de millar ya que la calculadora lo entendería como un número decimal.

Veamos a continuación algunos ejemplos de cómo utilizar la calculadora científica.

Ejemplo: 56 · (- 12) : (- 2) = 336

56 × 12 +/− ÷ 2 +/− =

Ejemplo: 2 ·[7 + 6 ·(5 + 4)] = 122

2 × [(··· 7 + 6 × [(··· 5 + 4 ···)] ···)] =

Podemos ayudarnos de la memoria de una *calculadora estándar* para realizar ciertos cálculos. Habrá una serie de botones etiquetados como "**Min**" (Ingreso en memoria), "**M+**", "**M-**", "**MR**" (Recuperar memoria), "**MS**" (Almacenar en memoria), "**MC**" (Borrar memoria), etc., que corresponderán a los botones de memoria de tu calculadora. Los valores pueden ingresarse directamente a la memoria, sumarse a la memoria o restarse a la memoria. Aparecerá una "M" cuando haya un valor almacenado en la memoria.

Ejemplo: (53 + 6) + (23 – 8) + (56 · 2) + (99 : 4) = 210,75.

Para realizar estos cálculos tendremos que realizar los siguientes pasos:

(53+6)	53 + 6 = M+	M 59.
(23−8)	23 − 8 M+	M 15.
(56×2)	56 × 2 M+	M 112.
(99÷4)	99 ÷ 4 M+	M 24.75
(Llamada de la memoria)	MR	M 210.75

8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS.

George Pólya, matemático húngaro, en 1945 estableció cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque a la hora de buscar la solución

a dicho problema:

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	
1. COMPRENDER EL PROBLEMA	- Se debe leer el enunciado despacio. - ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos). - ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos). - Hay que tratar de buscar relación entre los datos y las incógnitas. - Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.
2. TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO	- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos? - ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
	- Imaginar un problema parecido pero más sencillo. - Suponer que el problema ya está resuelto: ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida? - ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?
3. EJECUTAR EL PLAN.	- Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos. - ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto? - Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto? - Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace. - Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS	- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. - Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible? - ¿Se puede comprobar la solución? - ¿Hay algún otro modo de resolver el problema? - ¿Se puede hallar alguna otra solución? - Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

Con estos pasos podemos establecer una estrategia para la resolución de problemas consistente en establecer 3 columnas:

DATOS	OPERACIÓN	RESPUESTA
Aquí se colocan los datos que se plantean en el problema y se determina la incógnita.	Aquí se realizan todas las operaciones (razón, lógico) y se determina la respuesta.	Aquí se contesta a las preguntas del problema

Actividad 17

Un edificio de 30 pisos tiene el ascensor estropeado y para llegar a la azotea es preciso subir andando 540 peldaños (escaleras). Eva sube 30 peldaños por minuto y Sergio 45. ¿Cuánto tardará cada uno en subir a la azotea?

Actividad 18

Los termómetros de 2 lugares distintos marcan -7ºC y 12ºC. ¿Cuántos grados de diferencia hay entre ambos lugares?

Actividad 19

Carlos gana 8 euros por hora peinando caballos. Después de trabajar 8 horas tenía 94 €. ¿Cuánto dinero tenía antes de comenzar a trabajar?

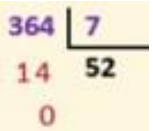
9. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO NATURAL.

Los **múltiplos** de un número son los que se obtienen al multiplicar dicho número por todos los números naturales salvo el 0. Puesto que hay infinitos números naturales, un número tiene infinitos múltiplos.

Para saber si un número *es múltiplo* de otro, simplemente debes hacer la división y comprobar que el cociente es un número natural y el resto de la división es cero.

Ejemplo: ¿Es el número 364 múltiplo de 7?

Si dividimos 367 entre 7 nos da una división exacta, por tanto, el número 368 es múltiplo de 7.



Actividad 20

Obtén cinco múltiplos del número 7, que sean menores que 1000.

10. DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL.

Los **divisores** de un número natural son aquellos números que se pueden dividir entre él, siendo el resto cero.

Para saber si un número es divisor de otro solo tienes que hacer la división y comprobar si el resto es cero.

Ejemplo: El número 7 es divisor de 364 o también podemos decir que el número 364 es divisible entre 7, ya que al dividir 364 entre 7 el resto es 0.

Ejemplo: ¿Es el número 3 divisor de 521?

El número 3 no es divisor de 521 o el número 521 no es divisible entre 3, ya que el resto de la división no es cero.

Actividad 21

¿El número 9 es divisor de 74?

10.1. Cálculo de divisores de un número natural.

Para determinar todos los divisores de un número, se buscan todos los números que lo dividen en forma exacta. Para ello, realizaremos divisiones repetidas de dicho número por los números naturales comenzando por el uno, hasta que el cociente que obtengamos sea menor o igual que el divisor.

Ejemplo: Son divisores de 18 los números 1, 2, 3, 6, 9 y 18, porque todos ellos dividen al número 12 de forma exacta.

Lo escribiremos ordenadamente así: d (18) = {1, 2, 3, 6, 9 y 18}

Debes recordar que entre los divisores de cualquier número siempre están el *1* y el *mismo número*.

Actividad 22

Calcula los divisores de 15.

Actividad 23

Observa que "un número tiene infinitos múltiplos, pero solo unos cuantos divisores". ¿Te atreverías a dar una razón?

Actividad 24

¿Cómo mínimo, cuántos divisores tendrá un número?

10.2. Criterios de divisibilidad.

Los **criterios de divisibilidad** son unas reglas que nos permiten averiguar si un número es **divisible** por otro sin necesidad de efectuar la división. Vamos a ver algunas de estas reglas:

- Un número es **divisible por 2** si acaba en *cero* o en cifra *par*.

  Ejemplo: 534 y 430 son divisibles entre dos.
- Un número **es divisible por 3** cuando la *suma* de sus cifras es *múltiplo de tres*.

  Ejemplo: el 681 es divisible entre 3 ya que si sumas sus cifras: 6 + 8 + 1 = 15, y el 15 es múltiplo de 3.
- Un número es **divisible por 4** si las *dos últimas cifras* son *ceros* o forman un número *múltiplo de 4*.

  Ejemplo: el 824 y el 7200 son divisibles por 4. El 824 por que sus dos últimas cifras, 24, son múltiplo de 4 y el segundo número 7200, por ser sus dos últimas cifras 00.
- Un número es **divisible por 5** si acaba en *cero* o en *5*.

  Ejemplo: el 675 y el 980 son divisibles entre cinco.
- Un número es **divisible por 6** si es divisible *por 2* y *por 3 a la vez*.

  Ejemplo: el 528 es divisible por 6 porque es divisible por 2 (ya que acaba en cifra par) y también es divisible por 3 (ya que al sumar sus cifras da un número múltiplo de 3, como se ve a continuación 5 + 2 + 8 = 15).

- Un número es **divisible por 7** cuando al quitarle la cifra de las unidades y restarle el duplo de esta cifra el número resultante es cero o múltiplo de siete.

  Ejemplo: 105 ¿es múltiplo de siete?; 10 - 2·5 = 0. Si lo es porque la diferencia es cero.
- Un número es **divisible por 8**, si sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 8.

  Ejemplo: 4.000, 1.048, 1.512, ...
- Un número es **divisible por 9** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

  Ejemplo: el 684 es divisible entre 9 ya que si sumas sus cifras: 6 + 8 + 4 = 18 y el 18 es múltiplo de 9.
- Un número es **divisible por 10** si acaba en cero.

Actividad 25

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 9 y por 3?

657, 872, 8.743, 9.357, 4.518.

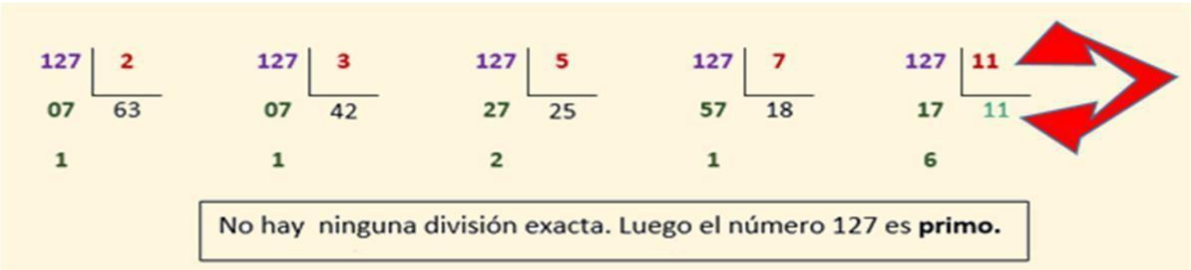
11. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS.

Los **números primos** son todos los números naturales, mayores que 1, los cuales son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad.

Cuando un número no es primo se dice que es **compuesto** y estará formado por la multiplicación de números primos.

Si los números fueran muy grandes, para saber si es primo podríamos proceder como hicimos para determinar los divisores de un número. Se divide el número por la serie de los números primos hasta llegar a una división, cuyo cociente sea igual o menor que el divisor. Si todas las divisiones son inexactas, el número propuesto es primo.

Ejemplo: Veamos si el número 127 es un número primo.



Actividad 26

Averigua cuáles de los siguientes números son primos:

a) 123.

b) 101.

c) 169.

d) 97.

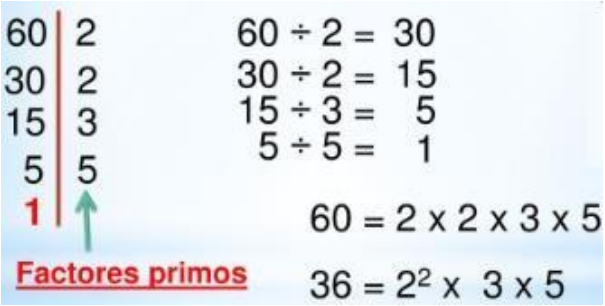
e) 143.

12. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS.

Cualquier número natural compuesto se puede descomponer de forma única en productos de potencias de **factores primos**. (Teorema fundamental de la aritmética).

El procedimiento de *factorización* consiste en dividir el número dado y sus cocientes sucesivos, por el menor número primo distinto de 1 que sea divisor, de manera progresiva hasta llegar a un cociente de valor la unidad.

Ejemplo: Vamos a descomponer en sus factores primos el número 60. Es conveniente comenzar el proceso de manera ordenada, partiendo del menor primo que sea divisor.



Actividad 27

Haz la descomposición en factores primos de los siguientes números:

a) 180 b) 250 c) 640 d) 5000

13. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS.

Dado dos o más números naturales, el **máximo común divisor**, si existe, será el *mayor de los divisores comunes* que tengan los números dados.

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de varios números dados, si existe, será el **producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente**. Este es un concepto que vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

-Los divisores del 24 son: 24, 12, 8, **6**, 4, **3**, **2** y 1.

-Los divisores del 90 son: 90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, **6**, 5, **3**, **2** y 1.

-Los números señalados en rojo son los divisores comunes a 24 y 90 y el mayor de esos

divisores es el 6. Luego **6 es el máximo común divisor**.

Actividad 28

¿Dado dos o más números naturales siempre existirá el m.c.d. entre ellos? ¿De existir el m.c.d. será un número mayor, igual o menor a los números dados?

Actividad 29

Calcula el m.c.d. de los siguientes pares de números:

a) 30 y 24.

b) 32 y 240.

c) 180 y 210.

Actividad 30

Resuelve esta posible situación que le ocurrió a un dependiente de ultramarinos. Tenía que preparar un envío de 18 paquetes de leche entera y 12 de leche desnatada en cajas, de manera que:

a) No se mezclen los paquetes de cada tipo de leche.

b) Que no sobre ningún paquete.

c) Que cada caja lleve la misma cantidad de paquetes.

d) Que cada caja lleve el mayor número posible de paquetes.

¿Cuántas cajas harían falta y cuántos paquetes llevará cada caja?

14. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS.

El **mínimo común múltiplo** de un conjunto de números es el *múltiplo común más pequeño que comparten*. Así, el mínimo común múltiplo (**m.c.m.**) de varios números dados, que siempre existe, será **el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente** de la descomposición factorial de dichos números.

Este concepto lo vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

Los múltiplos del 6 son: 6; **12**; 18; **24**; 30; **36**; 42; 48; ...

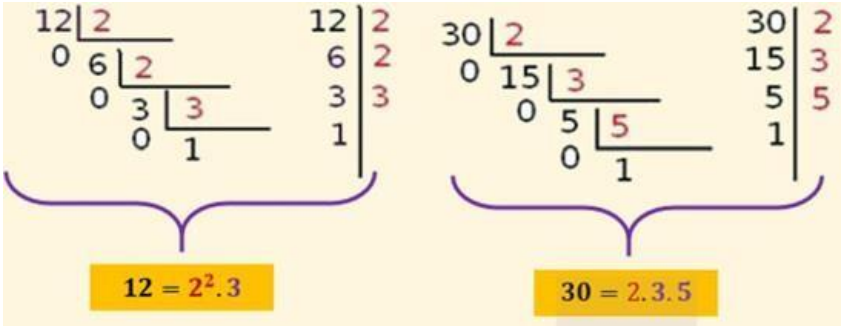
Los múltiplos del 4 son: 4, 8; **12**; 16; 20; **24**; 28; 32; **36**; …

Los números marcados en azul son múltiplos comunes a ambos y el **mínimo común múltiplo** es el múltiplo más pequeño de los comunes; es decir el **12**.

El método que hemos seguido no es el más adecuado para hacer el cálculo del mínimo común múltiplo ya que solo es útil cuando se trata de números muy sencillos. Es más eficiente emplear el proceso de factorización o descomposición factorial que veremos a continuación.

Ejemplo: Calculemos el máximo común divisor de 12 y de 30. Para ello seguiremos el siguiente procedimiento:

1º. Realizaremos la descomposición factorial de los números dados:



2º. El *mínimo común múltiplo* es el **producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente**: m.c.m.(12, 30) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ = **60.**

Actividad 31

Determina el mínimo común múltiplo de 60 y 90.

Actividad 32

1) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de los números 125 y 225?

a) 525

b) 1125

c) 225

2) Piensa y contesta:

a. ¿Por qué nunca nos piden calcular el máximo común múltiplo?

b. ¿Por qué nunca se nos pide calcular el mínimo común divisor?

3) En una urbanización el jardinero arregla el jardín cada 12 días y los cristales del edificio se limpian cada 30. El presidente de la comunidad se reúne con el jardinero y el limpiador cada vez que estos coinciden en la urbanización. Hoy han coincidido y la reunión se ha celebrado, ¿dentro de cuantos días se celebrará la próxima reunión?

Actividad 33

1) Se quiere aserrar una plancha de madera en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuánto podrá medir el lado de cada cuadrado si la longitud de la plancha es de 120 cm y la anchura de 75 cm?

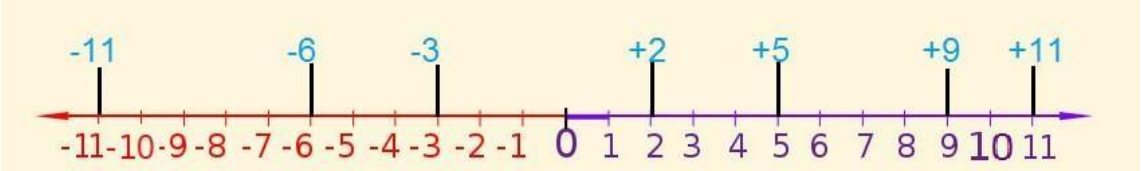
2) Una pareja de novios ha quedado para verse a las 7 de la tarde en un bar, pero, por equivocación, cada uno va a un local diferente de la misma calle. Ella sale cada 15 minutos para comprobar si llega el novio y él sale cada 10 minutos. ¿A qué hora se encontrarán?

TEMA 1- SOLUCIONES A LAS TAREAS PROPUESTAS

Actividad 1

45.693 < 54.956 < 56.505 < 78.549

Actividad 2



Actividad 3

a) +4 o -4.

b) -5.

c) -7.

Actividad 4

a) Op(+4) = -4.

b) Op(-6) = +6.

c) Op(-5) = +5.

d) Op(3) = -3.

e) Op(0) = 0.

f) Op(-8) = +8.

Actividad 5

a) 6570 + 167 + 8658 = 15395

b) 563132 + 54006 + 66707 = 683845

c) 4657 + 506 + 568 + 70 = 5801

Actividad 6

a) 528 - 324 = 204

b) 11929 – 8974 = 2955

Actividad 7

a) (- 5) - (+7) = - 12

b) (+4) – (- 6) = +10

c) (- 3) – (- 7) = +4

d) (+4) – (+2) = +2

e) (+4) – (+6) = - 2

Actividad 8

a) 12 - 5 = +7.

b) 12 - (-5) = +17

c) -12 - 5 = -17

d) -12 - (-5) = -7

Actividad 9

a) (+6) – (-2) + (-5) – (+4) = -1

b) (-5) – (-5) – (+7) + (-6) = -13

c) (-1) – (-10) + (+5) – (+7) = +7

d) 14 - (12 + 2) = 0

e) 17 - (-9 - 14) = +40

f) -14 + (6 - 13) = -21

g) 2 + (7 – 3) – (8 – 4) = +2

h) -1 – (2 – 5) + (7 – 4) = +5

Actividad 10

a) 3·b + 5·b – 2·b = (3 + 5 – 2)·b

b) 6 x 4 + 3 x 4 + 2 x 4 = (6 + 3 + 2) x 4

c) 6·a + 6·b = 6·(a + b)

d) 2·a + 2·c = 2·(a + c)

Actividad 11

a) 2306 x 305 = 703330

b) 7650 x 400 = 3060000

c) 3785 x 501 = 1896285

Actividad 12

a) 425 x 100 = 42500

b) 632 x 10 = 6320

c) 35 x 1000 = 35000

Actividad 13

a) (-4) · (+2) = -8.

b) (+3) · (+7) = +21.

c) (+3) · (-5) = -15.

d) (-5) · (-12) = +60.

e) 2 · (-3) = -6.

f) 4 · (-5) · 2 = -40.

g) 3 · (-3) · (-7) = +63.

h) (-2) · (-5) · (-9) = -90

Actividad 14

a) 675 : 15 = 45 minutos

b) 5475 : 365 = 15 años

c) 768 : 24 = 32 cajas

d) 235 : 3 ⇒ Cociente: 78; Resto: 1. Le corresponden 78 sellos a cada uno y sobra un sello.

Actividad 15

a) 49067 : 31

Cociente = 1582

Resto = 25

b) 34597 : 475

Cociente = 72

Resto = 397

Actividad 16

a) 6 · (- 3) + 5 · (- 2) + (- 4) · (- 5) = -8

b) -2 · [-3 + 4 · (-5 -2)] = +62

c) 2 – 3 · [(5 – 2) · (3 – 6) + 8] = +5

d) 20 – 9 · 2 – (-5) · (-2) = -8

e) 2 · (3 + 5) – (8 – 1) + (-1) · (3 + 1) – 8 = -3

f) 9: [6 : (-2)] = -3

g) [(+7) · (-20)] : (+10) = -14

h) (+4) · (1 – 9 + 2) : (-3) = +8

i) [35 – (6 – 34) + (8 – 22)] : 7 = +7

j) 7 · [6 – (- 5)] – 4 · (5 – 3) = +69

Actividad 17

1. COMPRENDER EL PROBLEMA:

- Datos: Edificio: 30 pisos, 540 peldaños. Eva sube 30 peldaños/min. Sergio sube 45 peldaños/min.

- Incógnita: ¿Cuánto tarda Eva y cuánto Sergio?

2. TRAZAR UN PLAN:

- Datos que no se utilizan: 30 pisos

- Descomponer el problema en otros más pequeños y decidir qué operación se realiza:

Eva: 30 peldaños/min. Total 540 peldaños, por lo tanto dividiremos todos los peldaños entre los que sube en 1 min (30).

Sergio: 45 peldaños/min. Total 540 peldaños, por lo tanto dividiremos todos los peldaños entre los que sube en 1 min (45).

De esta manera me dará el tiempo que tarda en subir.

3. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN. Hacer las operaciones. Eva: 540 : 30 = 18 minutos.

Sergio: 540 : 45 = 12 minutos.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS

Se revisan las operaciones y se comprueba que la solución sea lógica.

Actividad 18

Datos: -7 ºC y 12 ºC

Incógnita: ¿Cuántos grados de diferencia hay?

Operación a realizar: Resta. 12 - (-7) = 12 + 7 = 19

Comprueba el resultado dibujando la recta numérica:

Solución: Hay 19 ºC hay de diferencia entre ambos lugares.

Actividad 19

1. COMPRENDER EL PROBLEMA:

Datos: Gana 8€ la hora. Trabaja 8 horas. Tiene 94 €

Incógnita: ¿Cuánto dinero tenía antes de empezar a trabajar?

2. TRAZAR UN PLAN:

Descomponer el problema en otros más pequeños y decidir qué operación se realiza: Gana 8 € y trabaja 8 horas

¿Cuánto ha ganado?

Tiene 94 €, para saber cuánto tenía tengo que quitar lo que ha ganado.

3. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN. Hacer las operaciones. 8 € · 8 horas = 64 € ha ganado.

Tiene 94 € - 64 € que ha ganado = 30 € tenía.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS

Se revisan las operaciones y se comprueba que la solución sea lógica. Antes de empezar a trabajar tenía 30 €.

Actividad 20

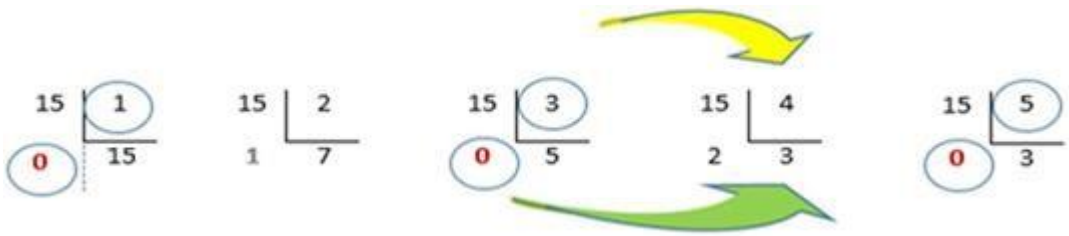
$7 = 7 \cdot \{N\} = 7, 14, 21, 28, 35 \ldots$

Actividad 21

El número 9 no es divisor de 74, pues 74 no es múltiplo de 9 y por tanto 74 no tiene una medida exacta de nueves. Es decir:

Actividad 22

Claro, los divisores del quince serán los divisores y cocientes de las divisiones exactas.



Actividad 23

Dado un número por ejemplo el 20, como mucho podría llegar a tener 20 divisores (que no es el caso) pues el número 21 como divisor ya no podría generar una división entera por ser de cardinal mayor al dividendo.

Por tanto un número solo puede tener unos cuantos divisores.

Actividad 24

Claro, un número siempre tendrá como mínimo dos divisores, el uno y el mismo.

Actividad 25

Solo tenemos que comprobar si es divisible por 9 pues todo número divisible por 9 lo es también por 3. Son divisibles por 9 y por 3 los siguientes números:

657

4518

Actividad 26

Son primos el 101 y el 97.

Actividad 27

a) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

b) $250 = 2.5^3$

c) $640 = 2^7.5$

d) $5000 = 2^3.5^4$

Actividad 28

Dados dos o más números naturales no tiene por qué existir un número que sea divisor común de todos ellos, pues cada uno de los números puede venir generado por números primos distintos.

De existir el m.c.d. deberá ser un número igual o más pequeño que el menor de los números, pues de no ser así no podríamos hacer divisiones enteras exactas. Es decir, repartos exactos. Pues con él o los números que fuesen más pequeños aparecerían divisiones decimales.

Actividad 29

a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $24 = 2^3 \cdot 3 \rightarrow$ m.c.d. $(30,24) = 2 \cdot 3 =$ **6**.

b) $32 = 4 \cdot 8 = 2^5$ y $240 = 24 \cdot 10 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$ m.c.d. $(32,240) = 2^4 =$ **16**.

c)

180	2				
00	90	2			
0	10	45	3		
	0	15	15	3	
		0	0	5	5
				0	1

$180=2^2.3^2.5$

210	2			
010	105	3		
0	15	35	5	
	0	0	7	7
			0	1

$210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$

El m.c.d. (180,210)= 2·3·5 = 60

Actividad 30

Como no podemos mezclar los tipos de leche, debemos empaquetar en cajas diferentes los 18 cartones de leche entera y los 12 de leche desnatada.

Las cajas deben contener el mismo número de cartones de leche, que supondremos **C**.

Si N_{entera} es el número de cajas necesarias para empaquetar los 18 cartones de leche entera, entonces pondríamos: 18 = N_{entera}. C.

Si $M_{desnatada}$ es el número de cajas necesarias para empaquetar los 12 cartones de leche desnatada, entonces pondríamos: 12 = $M_{desnatada}$ C.

Por tanto podríamos poner:

N_{entera}. = 18/ C de la misma manera, $M_{desnatada}$ =12/C.

Como el número de cajas debe ser un número entero y no deben sobrar huecos en ellas, C, debe ser un divisor de 12 y 18.

Divisores del 12: 2, 3, 4, 6,12.

Divisores del 18: 2, 3, 6, 9, 18.

Divisores comunes: 2, 3, 6.

Por tanto, el problema se resolvería cogiendo cajas de capacidad 2, 3, o 6 cartones de leche, pero como nos piden que cada caja lleve el mayor número de cartones la solución sería los <u>embalajes con capacidad para 6 cartones de leche</u>.

Actividad 31

60	2				
00	30	2			
0	10	15	3		
	0	0	5	5	
			0	1	5
				0	1

$60=2^2.3.5^2$

90	2			
10	45	3		
0	15	15	3	
	0	0	5	5
			0	1

$90=2.3^2.5$

Por tanto el m.c.m. (60,90) = $2^2\cdot3^2\cdot5^2$

Actividad 32

1) b) 1125.

2)

a) Pues porque nunca podríamos saber cuál es, ya que múltiplos comunes a varios números hay infinitos y por tanto, aunque dijéramos un número muy grande como múltiplo, siempre se podría encontrar otro múltiplo mayor que el anterior.

b) Porqué sería una tontería, ya que el menor divisor que compartirían una serie de números siempre es la unidad.

3) El jardinero arreglará el jardín al pasar 12 días, 24 días, 36 días,… El limpiador hará la limpieza al pasar 30 días, 60 días, 90 días,…

Coincidirán cuando los días transcurridos sean iguales para los dos, ese número tiene la característica de ser múltiplo común de 12 y 30. Además será el menor pues nos piden que calculamos la primera vez que vuelven a coincidir.

El m.c.m. (12,30) = 60, es decir cada 60 días.

Actividad 33

1) El m.c.d. (120,75) = 15. Por tanto, 15 cm medirá el lado del cuadrado.

2) El m.c.m. (10,15) = 30. Por tanto, volverán a coincidir dentro de 30 minutos. Se encontrarán a las 7 y media.

PARTE 1 - TEMA 2.
NÚMEROS FRACCIONARIOS Y DECIMALES. OPERACIONES BÁSICAS.

ÍNDICE

1. FRACCIONES. 2
   1.1. Tipos de fracciones 3
   1.2. Fracciones equivalentes. 3
   1.3. Fracción simplificada o irreducible. 4
2. ORDENACIÓN Y OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES. 4
   2.1. Ordenación o comparación de números racionales. 4
   2.2. Operaciones con números racionales. 5
      2.2.1. Suma y resta de números racionales 5
      2.2.2. Multiplicación de números racionales. 6
      2.2.3. División de números racionales 7
3. OPERACIONES COMBINADAS. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES. 7
4. NÚMEROS DECIMALES. REPRESENTACIÓN, REDONDEO Y OPERACIONES. 9
   4.1. Representación de números decimales. 10
   4.2. Redondeo y truncamiento de números decimales. 10
   4.3. Operaciones con números decimales. 11
5. RELACIÓN ENTRE FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES. 14
6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENEN FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES. 15
7. CONCEPTO DE POTENCIA Y RAÍZ. 15
   7.1. Potencias de exponente natural. 15
   7.2. Raíces cuadradas. 16

SOLUCIONES A LAS TAREAS PROPUESTAS 18

1. FRACCIONES.

Seguramente más de una vez hemos visto en los medios de comunicación, en los comercios, o hablando con algún amigo expresiones de este tipo:

- Un tercio de las patatas “chips” es grasa.
- El tren con destino a Madrid trae un retraso de tres cuartos de hora.
- Uno de cada 100 nacidos en España es celiaco.
- Los gastos, que ascienden a 3450 €, tienen que repartirse entre los 12 vecinos del inmueble.

Todas estas formas de hablar se representan en matemáticas por un tipo de números que se llaman **fraccionarios**.

Una **fracción** representa el número de partes que cogemos de un todo o unidad, que está dividido en partes iguales. Se representa con dos números separados por una línea horizontal u oblicua.

$$\frac{a}{b} \quad \text{o} \quad a/b$$

Los términos de una *fracción* son el **numerador (a)** y **el denominador (b)**. El *numerador* es el número de partes que cogemos y el *denominador* es el número de partes en que hemos dividido el todo o unidad. El *denominador* NO puede ser cero.

Una fracción también representa el cociente de dos números, en este caso, del *numerador* entre el *denominador*.

El ejemplo clásico es el de un queso que partimos en porciones iguales. En el dibujo, hemos hecho 8 porciones, 3 rosas y 5 verdes. Si tomamos las 3 rosas, representan 3 porciones de las 8 en las que hemos dividido el queso, es decir 3 / 8 del queso, y si tomamos las 5 verdes, representan 5 porciones de las 8 en las que hemos dividido el queso, es decir 5 / 8 del queso.

Para leer una fracción, el *numerador* se lee normalmente, pero el *denominador* tiene una forma especial de leerse.

Denominador y Lectura		Ejemplos	
2	*medios*	5/2	cinco medios
3	*tercios*	2/3	dos tercios
4	*cuartos*	3/4	tres cuartos
5	*quintos*	4/5	cuatro quintos
6	*sextos*	5/6	cinco sextos
7	*séptimos*	6/7	seis séptimos
8	*octavos*	7/8	siete octavos
9	*novenos*	8/9	ocho novenos
10	*décimos*	9/10	nueve décimos

Cuando el *denominador* es mayor de 10, se agrega *avos* al número.

2 / 11 dos once*avos*; 4 / 13 cuatro trece*avos*; 9 / 15 nueve quince*avos*.

Actividad 1

Escribe las siguientes fracciones, señalando el numerador y denominador de cada una.

	Fracción	Numerador	Denominador
a) Dos tercios			
b) Tres cuartos			
c) Cinco séptimos			
d) Ocho novenos			
e) Un sexto			

1.1. Tipos de fracciones

- **Fracción propia**: Cuando el numerador es menor que el denominador. El valor de la fracción es menor que la unidad. Ejemplos:

  a) $\frac{4}{6} < 1$ b) $\frac{2}{5} < 1$ c) $\frac{1}{4} < 1$

- **Fracción impropia**: Cuando el numerador es mayor que el denominador. La fracción vale más que la unidad. Ejemplos:

  a) $\frac{4}{3} > 1$ b) $\frac{7}{5} > 1$ c) $\frac{8}{3} > 1$

- **Fracción unitaria**: Cuando el numerador es igual que el denominador, y la fracción vale por tanto una unidad. Ejemplos: a) $\frac{6}{6} = 1$ b) $\frac{3}{3} = 1$

Las *fracciones* o *números fraccionarios* están incluidas en el conjunto de los **númerosracionales**. Al conjunto de los *números racionales* lo denominamos **Q**.

1.2. Fracciones equivalentes.

Dada una fracción cualquiera, podemos buscar otras **fracciones equivalentes** a ellasimplemente multiplicando a los dos términos de la fracción por el mismo número, pues ambas tendrán el mismo valor. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \; ; \; \frac{4}{16} = \frac{4:4}{16:4} = \frac{1}{4}$$

Dos fracciones ***a/b*** y ***c/d*** son **equivalentes** si se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Actividad 2

Indica cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes entre sí.

$\frac{6}{10}; \frac{12}{28}; \frac{90}{150}; \frac{27}{18}; \frac{66}{110}; \frac{24}{56}$

1.3. Fracción simplificada o irreducible.

Obtener la **fracción simplificada o reducible** de una fracción, consiste en hallar la fracción equivalente más pequeña posible. Siempre presentaremos las fracciones en su forma *simplificada*.

El método más rápido para averiguar la *fracción simplificada* de una fracción, es dividir elnumerador y el denominador por el *máximo común divisor (m.c.d.)* de estos dos números.

Ejemplo: Queremos simplificar la fracción: 100/250.

Averiguaremos, por tanto, el m.c.d. (100, 250). Para ello, descomponemos en factores primos: $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $250 = 2 \cdot 5^3 \rightarrow$ m.c.d. (100, 250) = $2 \cdot 5^2 = 50$.

Así lo que hacemos es dividir a los dos términos de la fracción por 50:

$$\frac{100}{250} = \frac{100:50}{250:50} = \frac{2}{5}$$

Cuando en una fracción, el *numerador* y el *denominador* no tienen ningún divisor común, se dice que es una **fracción irreducible**.

Actividad 3

Simplifica las siguientes fracciones:

$\frac{6}{12}, \quad \frac{54}{81}, \quad \frac{40}{320}, \quad \frac{180}{640}$

2. ORDENACIÓN Y OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES.

2.1. Ordenación o comparación de números racionales.

Existen diversas maneras de ordenar dos o más fracciones. A continuación, mostraremos alguna de ellas:

- **Ordenación de fracciones con igual denominador**

  De dos **fracciones** que tienen el **mismo denominador**, es **menor** la que tiene **menor numerador**.

  Por ejemplo: $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, pues 3 < 4.

- **Ordenación de fracciones con igual numerador**

  De dos **fracciones** que tienen el **mismo numerador** es **menor** el que tiene **mayor denominador**.

  Por ejemplo: $\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$, pues 7 > 4.

- **Ordenación de fracciones con numeradores y denominadores distintos**

De dos **fracciones** que tienen **distinto numerador y denominador**, se debe buscar una **fracción equivalente a cada una de las fracciones dadas cuyos denominadores sean iguales**.

Por ejemplo: ¿Cuál de estas fracciones es mayor $\frac{5}{6}$ o $\frac{7}{9}$?

a) Como dijimos, una manera es buscar fracciones equivalentes a las dadas con igual denominador:

$\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$ y $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$. Ambas fracciones equivalentes tienen como denominador, 18.

Como 15 > 14 podemos decir que: $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$ y consecuencia $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

b) Otra manera más rápida de hacer lo mismo es buscar el m.c.m. de ambos denominadores.

El m.c.m. (6, 9) = 18. Si reducimos las fracciones a común denominador, tendremos:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 3}{18}=\frac{15}{18};\ \frac{7}{9}=\frac{7\cdot 2}{18}=\frac{14}{18}\rightarrow\frac{15}{18}>\frac{14}{18}\rightarrow\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$$

Actividad 4

Escribe el signo > o <, donde corresponda.

$\frac{3}{7}\square\frac{3}{9}$, $\frac{2}{5}\square\frac{6}{5}$, $\frac{3}{9}\square\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}\square\frac{5}{7}$

2.2. Operaciones con números racionales.

2.2.1. Suma y resta de números racionales

Al **sumar o restar** dos números racionales nos podemos encontrar dos casos:

- Si las fracciones tienen el **mismo denominador**, se suman o restan los numeradores y se pone el mismo denominador.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\ ;\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\ ;\ \frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

- Si las fracciones tienen **distinto denominador**, lo primero que tenemos que hacer es igualar los denominadores. Para conseguirlo, buscamos dos fracciones equivalentes a las dadas, multiplicando el numerador y el denominador de cada una de ellas por el denominador de la otra. Una vez obtenido el mismo denominador, procedemos como en el caso anterior.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{8}{10}-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$$

Otra de forma de sumar o restar fracciones que tengan *distinto denominador*, es calcular el *m.c.m. de todos los denominadores* con el fin de obtener fracciones equivalentes a las dadas,que tengan el mismo denominador. Una vez obtenidas las fracciones equivalentes con el mismo denominador, procedemos como en el caso anterior.

Ejemplo:

$\frac{11}{6}$ — $\frac{7}{10}=$

Hay que buscar una fracción que sea equivalente a 11/6 y otra equivalente a 7/10 pero quetengan el mismo denominador.

Paso 1: Calculamos el m.c.m. de 6 y 10 → 6 = 2 ·3; 10 = 2 ·5 → m.c.m (6,10) = 2· 3· 5 = 30.Paso 2: Los *denominadores* de las nuevas fracciones serán 30 y los *numeradores* serán elnumerador original por 30 dividido entre el denominador original, es decir:

$$\frac{11}{6}-\frac{7}{10}=\frac{\frac{11\cdot 30}{6}}{30}-\frac{\frac{7\cdot 30}{10}}{30}=\frac{\frac{330}{6}}{30}-\frac{\frac{210}{10}}{30}=\frac{55}{30}-\frac{21}{30}=\frac{34}{30}=\frac{17}{30}$$

Actividad 5

Suma las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$ $\quad b)\ \frac{3}{5}+\frac{3}{10}+\frac{-3}{15}$

Actividad 6

Resta las siguientes fracciones:

$a)\ -\frac{6}{4}-\frac{4}{6}-\frac{1}{8}=$ $\quad b)\ \frac{13}{2}-\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

2.2.2. Multiplicación de números racionales

La **multiplicación** de dos números racionales es otra fracción que tiene como *numerador* el *producto de numeradores* y como *denominador* el *producto de los dos denominadores*.

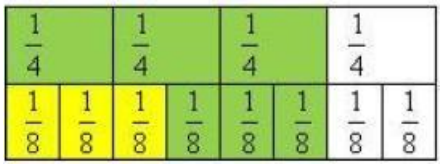
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

El producto de fracciones es una fracción de una fracción, es decir, una parte de una parte.

Ejemplos:

$$\frac{-3}{5}\cdot\frac{-7}{6}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}\ ;\ \frac{3}{5}\cdot 4=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{1}=\frac{12}{5}$$

Ejemplo: Gasto al mes 3/4 de mi sueldo. La mitad de estos gastos corresponde al pago de la hipoteca. ¿Qué fracción de mi sueldo corresponde al pago de la hipoteca?



Tendremos que calcular la mitad de 3/4:

$$\frac{1}{2}\ de\ \frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

Actividad 7

Multiplica las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{5}\quad b)\ \frac{7}{21}\cdot\frac{3}{8}$

2.2.3. División de números racionales

La **división** de dos fracciones es otra fracción que tiene por *numerador* el *producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda*, y por *denominador* el *producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda* (productos cruzados).

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos:

$$\frac{6}{11}:2=\frac{6}{11}:\frac{2}{1}=\frac{6\cdot 1}{11\cdot 2}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}\ ;\ \frac{8}{6}:\frac{3}{9}=\frac{8\cdot 9}{6\cdot 3}=\frac{72}{18}=\frac{36}{9}=\frac{12}{3}=4$$

Actividad 8

Realiza la división de las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{1}{5}:\frac{25}{75}\quad b)\ \frac{4}{18}:\frac{12}{24}$

3. OPERACIONES COMBINADAS. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES.

Para realizar **operaciones combinadas** con números racionales hay que seguir la misma *jerarquía de las operaciones* que se ha usado con los números naturales y enteros.

El procedimiento sería el siguiente:

- Primero resolvemos los paréntesis y corchetes, de dentro hacia fuera.
- Después las potencias y raíces.
- Luego las multiplicaciones y divisiones, en el orden que aparezcan (de izquierda a derecha).

- Y por último las sumas y restas, en el orden que aparezcan (de izquierda a derecha).

La fracción que resulte se simplificará siempre que sea posible.

Ejemplos:

a) Primero hacemos las multiplicaciones y divisiones y luego la suma.

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{6}{10}+\frac{21}{10}=\frac{27}{10}$$

b) Primero resolvemos el paréntesis, a continuación hacemos la división y luego la resta.

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}:\frac{5}{6}\right):\frac{1}{7}=\frac{1}{3}-\frac{12}{15}:\frac{1}{7}=\frac{1}{3}-\frac{84}{15}=\frac{5}{15}-\frac{84}{15}=\frac{-79}{15}$$

c) Primero resolvemos los paréntesis y segundo la resta.

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{10}+\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)=\frac{11}{10}-\frac{5}{12}=\frac{66}{60}-\frac{25}{60}=\frac{41}{60}$$

d) Primero resolvemos el paréntesis, luego la división y por último la resta.

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{9}:5=\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{9}:\frac{5}{1}=\frac{9}{6}-\frac{4}{45}=\frac{135}{90}-\frac{8}{90}=\frac{127}{90}$$

e) Primero resolvemos el paréntesis, después la multiplicación y por último la resta.

$$4-3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=4-3\cdot\left(\frac{10}{15}-\frac{3}{15}\right)=4-3\cdot\frac{7}{15}=4-\frac{21}{15}=\frac{60}{15}-\frac{21}{15}=\frac{39}{15}$$

Actividad 9

Realiza las siguientes operaciones.

$a)\ \left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=$

$b)\ \frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$

$c)\ \left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=$

$d)\ \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=$

4. NÚMEROS DECIMALES. REPRESENTACIÓN, REDONDEO Y OPERACIONES.

Un **número decimal** es un *número no entero*, compuesto por una **parte entera** y una **parte decimal** que van separadas por una coma. La *parte entera* va a la izquierda de la coma y la *partedecimal* va a la derecha de la coma. Por ejemplo, en el *número decimal* 1,3 la *parte entera* es 1 y la*parte decimal* es 3.

En otras ocasiones, la **coma** se sustituye por un *punto* (·) o una *apóstrofe* (‘). En las calculadorasse utiliza el punto para expresar un número decimal.

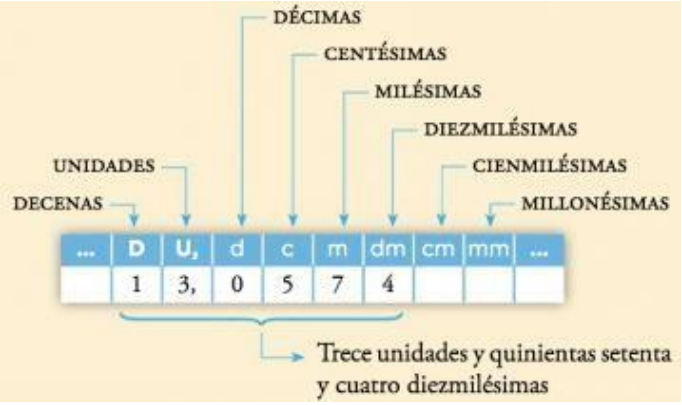
Ejemplo: 2,5 también se podría expresar como 2.5 o 2’5.

Los *números decimales* representan cantidades no enteras. Es decir, representan cantidades menores que la unidad o mayores que la unidad pero no son unidades enteras.

Los *números decimales* están basados en el *sistema de numeración decimal*. En el *sistema de numeración decimal*, una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediatamente inferior. Por tanto,

1 Unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1000 milésimas = …

Para leer un *número decimal*, usando los valores posicionales, primero se nombra la *parte entera* expresada en unidades y después se nombra la *parte decimal* expresada en el orden de unidades de la cifra decimal que queda a la derecha (*décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas*, etc.).



Ejemplo: el número 27,5783 se lee así: “veintisiete y cinco mil setecientos ochenta y tres diezmilésimas”.

Otra forma de leer los *números decimales*, es pronunciar la *parte entera*, después la *coma* y luego se mencionar los *dígitos de la parte decimal* uno a uno.

Ejemplo: el número 63,7295 se lee así: “sesenta y tres coma siete dos nueve cinco”.

Actividad 10

Indica con cifras la parte decimal y la parte entera de cada uno de los siguientes números:

57.1

Parte entera: ☐ Parte decimal: ☐

5.75

Parte entera: ☐ Parte decimal: ☐

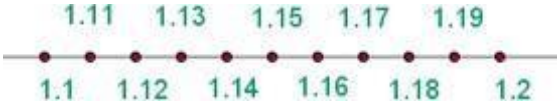
235.89

Parte entera: ☐ Parte decimal: ☐

4.1. Representación de números decimales.

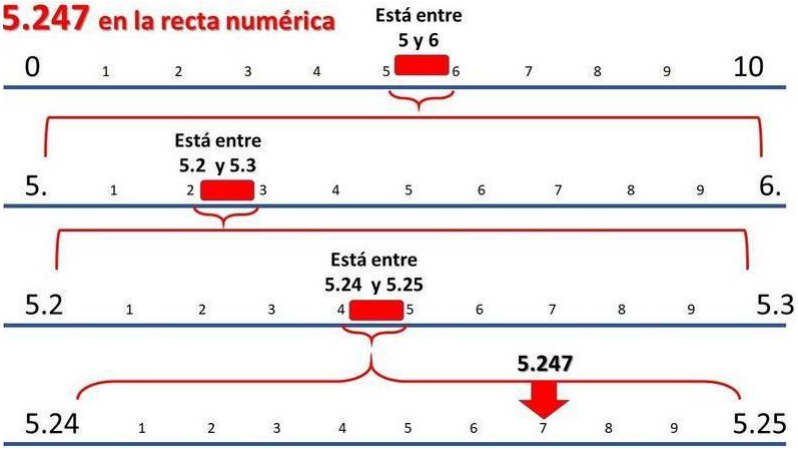
Cada *número decimal* tiene su lugar en la *recta numérica*. Para representar las **décimas** dividimos la *unidad* en 10 partes.

Para representar las **centésimas** dividimos cada *décima* en 10 partes.



Y para representar las **milésimas** dividimos cada *centésima* en 10 partes, y asícontinuaríamos para las *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc.

Ejemplo: Representemos el número decimal 5,247 en la recta numérica.



4.2. Redondeo y truncamiento de números decimales.

Podemos aproximar un número decimal por otro que tenga menor número de cifrasdecimales. Esto podemos hacerlo de dos formas distintas:

- Mediante **truncamiento**. Se eliminan las cifras que están a la derecha de la unidad a la que debemos truncar.
- Mediante **redondeo**. Para *redondear* un número a una unidad determinada, debemos fijarnos en la cifra inmediatamente posterior. La cifra que redondeamos aumenta en uno si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5. En otro caso no varía.

Ejemplos de truncamiento:

2,3647 → 2,3 (Truncamiento hasta las décimas)

2,3647 → 2,36 (Truncamiento hasta las centésimas)

2,3647 → 2,364 (Truncamiento hasta las milésimas)

2,3647 → 2,3647 (Truncamiento hasta las diezmilésimas)

Ejemplos de redondeo:

2,3**6**105 → 2,4 (Redondeo hasta las décimas).

2,36**1**05 → 2,36 (Redondeo hasta las centésimas).

2,361**0**5 → 2,361 (Redondeo hasta las milésimas).

2,3610**5** → 2,3611 (Redondeo hasta las diezmilésimas.

Actividad 11

Trunca y redondea los siguientes números a la cifra que se indique en cada caso:

57.359 ⟶ A las décimas.

Truncamiento: ☐ Redondeo: ☐

5.0075 ⟶ A las centésimas

Truncamiento: ☐ Redondeo: ☐

23.0535 ⟶ A las centésimas.

Truncamiento: ☐ Redondeo: ☐

4.3. Operaciones con números decimales.

4.3.1. Suma y resta de números decimales

Para *sumar* o *restar* números decimales:

1. Se colocan en columnas haciendo corresponder las comas.
2. Se suman o se restan unidades con unidades, décimas con décimas, centésimas con centésimas...

Ejemplos:

342,528 + 6726,34 + 5,3026 + 0,37 =

```
      342.528
    6 726.34
+       5.3026
        0.37
  ----------------
    7 074.5406
```

372,528 – 69,68452=

```
    372.528
-    69.68452
  ----------------
    302.84348
```

Actividad 12

Calcula el resultado de las siguientes sumas y restas de números decimales:

a) 57,28 + 35,2 + 4,257 = _____

b) 15,75 – 3,251 = _____

c) 9,35 + 35,1 – 3,2 = _____

4.3.2. Multiplicación de números decimales

Para *multiplicar* dos números decimales:

1. Se multiplican como si fueran números enteros.
2. El resultado final es un número decimal cuyo número de decimales es igual a la suma de las cifras decimales de los dos factores. Si no tienes cifras suficientes para poner la coma decimal, añade los ceros que hagan falta a la izquierda del resultado.

   Ejemplo:

   46,562 · 38,6 = 1797,2932.

```
     46.562
      x 38.6
  ----------
     279372
   372496
  139686
  ----------
  1797.2932
```

   Como el primer factor tiene 3 decimales y el segundo 1, el resultado tiene 4 decimales.

Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplos:

1,236 · 10 = 12,36.

1,236 · 100 = 123,6.

1,236 · 1000 = 1236.

1,236 · 10000 = 12360.

Actividad 13

Resuelve las siguientes multiplicaciones de números decimales:

a) 15,3 · 12,71 = _____

b) 7,67 · 6,832 = _____

c) 6 · 9,876 = _____

d) Hemos comprado 32,5 l de leche a 0,92 € el litro. ¿Cuánto hemos pagado?

4.3.3. División de números decimales

- Sólo el dividendo es decimal. Se efectúa la división de números decimales como si de números enteros se tratara. Cuandobajemos la primera cifra decimal, colocamos una coma en el cociente y continuamos dividiendo.
- Ejemplo: 526,6562 : 7 = 75,2366

```
526. 6562 | 7
 36       |-------
   16       75.2366
    25
      46
       42
        0
```

- Sólo el divisor es decimal. Quitamos la coma del divisor y añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. A continuación, dividimos como si fueran números enteros.

  Ejemplo:

  5126 : 62,37 = 82,18

  512600 | 6237
  13640 82.18
  11660
  54230
  4334

- El dividendo y el divisor son decimales: Se iguala el número de cifras decimales del dividendo y del divisor, añadiendo a aquel que tenga menos decimales, tantos ceros como cifras decimales de diferencia haya. A continuación, se prescinde de la coma, y dividimos como si fueran números enteros.

  Ejemplo:

  5627,64 : 67,5261 = 83.34

  56276400 | 675261
  2255520 83.34
  2297370
  2715870
  14826

  Otros ejemplos:

  - 47,23 : 6,7 es igual que 472,3 : 67 (multiplicamos por 10)
  - 250,3 : 0,45 es igual que 25030 : 45 (multiplicamos por 100)
  - 42,05 : 1,347 es igual que 42050 : 1347 (multiplicamos por 1000)

Actividad 14

Realiza las siguientes divisiones:

a) 61,7 : 15 = _____

b) 43,9 : 32 = _____

c) 57,5 : 35 = _____

d) 2,4 : 7 = _____

Actividad 15

Realiza las siguientes divisiones:

a) 34,9 : 2,3 = _____

b) 1,26 : 5,1 = _____

c) El tío de Andrés quiere repartir 14,52 € entre sus tres sobrinos. ¿Cuánto dará a cada uno?

d) Hemos comprado varios litros de leche pagando por la compra 20,4 €. Si cada litro cuesta 0,85€, ¿cuántos litros hemos comprado?

5. RELACIÓN ENTRE FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES.

Cualquier *fracción* puede convertirse en número, entero o decimal, Para ello, solo tenemos que dividir el *numerador* entre el *denominador*.

Ejemplos:

$$\frac{8}{4} = 2 \ ; \ \frac{-10}{2} = -5 \ ; \ \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ; \ \frac{27}{4} = 6{,}75$$

Los *números decimales* pueden ser de tres tipos:

- **Decimal exacto**. Es aquel número decimal que tiene una cantidad finita de cifras decimales. Ejemplos: 2,46 y 5,352.
- **Decimal periódico puro**. Es aquel número decimal que tiene una cantidad infinita de decimales, pero que presenta una repetición en las cifras decimales. Las cifras que se repiten conforman el *período*, que se repite indefinidamente.

  Ejemplos: 0,333333… es un número decimal *periódico puro* de *periodo* 3; 3,2323232323…es un número decimal *periódico puro* con *período* 23.
- **Decimal periódico mixto**. Es aquel número decimal que tiene una cantidad infinita de cifras decimales, que presenta, a partir de una determinada cifra decimal, un *período*. Losdecimales anteriores al *período* se denominan *anteperíodo*.

  Ejemplos: 5,06121212…es un número decimal *periódico mixto* con *período* 12 y *anteperíodo* 06; 2,981818… es un número decimal *periódico mixto* con *período* 18 y *anteperíodo* 98.

A su vez, un *número decimal* se puede expresar mediante una *fracción*. Tan solo tendremos que hallar la **fracción generatriz**, es decir, la fracción cuyo resultado es ese número.

La **fracción generatriz** de un **número decimal exacto** es muy sencilla: su *numerador* es el *número dado sin la coma*, y como *denominador* la *unidad seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga ese número decimal*.

Ejemplos:

$$1{,}13 = \frac{113}{100} \ ; 0{,}179 = \frac{179}{1000} \ ; 2234{,}1 = \frac{22341}{10}$$

Para hallar la **fracción generatriz** de un **número decimal periódico puro**, escribimos en el *numerador* el *número decimal sin la coma hasta completar un periodo* y le restamos la *parte entera* del número decimal. Y en el *denominador* escribimos *tantos 9 como cifras tiene el período*.

Ejemplo: 2,23232323…

$$2{,}2323\ldots = \frac{223-2}{99} = \frac{221}{99}$$

Para hallar la **fracción generatriz** de un **número decimal periódico mixto**, escribimos en el *numerador* el *número decimal sin la coma hasta completar un periodo* y le restamos las *cifras hasta el anteperiodo* (incluidas las cifras de delante de la coma). Y en el *denominador* escribimos *tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo*.

Ejemplos: 2,981818… y 0,8666…

$$2,981818\ldots = \frac{29818-298}{9900} = \frac{29520}{9900} = \frac{164}{55}$$

$$0,8666\ldots = \frac{86-8}{90} = \frac{78}{90} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$$

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENEN FRACCIONES Y NÚMEROSDECIMALES.

Actividad 16

Elena va de compras con 180 €. Se gasta 3/5 de esa cantidad, ¿cuánto le queda?

Actividad 17

Eva sigue un régimen de adelgazamiento y no puede pasar en cada comida de 600 calorías. Ayer almorzó: 125 g de pan, 140 g de espárragos, 45 g de queso y una manzana de 130 g. Si 1 g de pan da 3,3 calorías, 1 g de espárragos 0,32 calorías, 1 g de queso 1,2 calorías y 1 gde manzana 0,52 calorías. ¿Respetó Eva su régimen?

Actividad 18

En las elecciones locales celebradas en un pueblo, 3/11 de los votos fueron para el partido A, 3/10 para el partido B, 5/14 para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15400. Calcular:

a) El número de votos obtenidos por cada partido.

b) El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa 5/8 del censo electoral.

Actividad 19

Un padre reparte entre sus hijos 1 800 €. Al mayor le da 4/9 de esa cantidad, al mediano 1/3 y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

7. CONCEPTO DE POTENCIA Y RAÍZ.

7.1. Potencias de exponente natural.

Una **potencia** es un producto de *factores iguales*. El número que se repite, **a**, se llama **base** y el número de veces que se repite la *base*, **n**, se llama **exponente**.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots^{(n\ veces)} \ldots \cdot a$$

Leemos la potencia a^n como **a** elevado a **n**.

Ejemplo: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Se lee: 5 elevado a 3 igual a 125.

Las *potencias* sirven para escribir una multiplicación formada por varios números iguales deuna manera más simplificada. Las potencias de exponente 2 se llaman *cuadrados* y las de exponente 3, se llaman *cubos*.

Casos especiales de potencias:

- Si la base de una potencia es 1, el resultado es 1 → $1^n = 1$.
- Si el exponente de una potencia es 1, el resultado es la base → $a^1 = a$.
- Si el exponente de una potencia es 0 (y la base no es 0), el resultado es 1 → $a^0 = 1$.

7.2. Raíces cuadradas.

La **raíz cuadrada** exacta de un número es otro número que elevado al cuadrado es igual alnúmero dado. Calcular la *raíz cuadrada* de un número es hacer la operación contraria a elevar esenúmero a su cuadrado. Es decir, la *potencia* es la operación inversa a la *radicación*.

$$\sqrt{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}$$

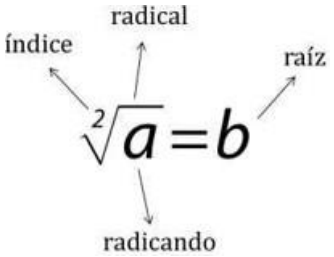
Ejemplos:

$2^2 = 4$, luego 2 es la raíz cuadrada de 4, es decir, $\sqrt{4} = 2$.

$5^2 = 25$, luego 5 es la raíz cuadrada de 25, es decir, $\sqrt{25} = 5$.

Las partes de que consta una *raíz cuadrada* son:

1. **Índice**: Es la cifra del tipo de raíz que se quiere calcular. En el caso de una raíz cuadrada el índice es 2, pero no se representa, se deja en blanco. Existen raíces cúbicas de índice 3 y las de otros índices (4, 5, 6…).
2. **Radical**: es el símbolo que indica que es una *raíz cuadrada*.
3. **Radicando**: Es el número del que se obtiene la *raíz cuadrada*.
4. **Raíz**: Es el resultado, es decir, la *raíz cuadrada* del *radicando*.



Llamamos **cuadrado perfecto** al número cuya *raíz cuadrada* es un número entero. A continuación se muestran algunos *cuadrados perfectos* o *raíces cuadradas exactas*.

1^2	=	1	11^2	=	121
2^2	=	4	12^2	=	144
3^2	=	9	13^2	=	169
4^2	=	16	14^2	=	196
5^2	=	25	15^2	=	225
6^2	=	36	16^2	=	256
7^2	=	49	17^2	=	289
8^2	=	64	18^2	=	324
9^2	=	81	19^2	=	361
10^2	=	100	20^2	=	400

Actividad 20

Escribe en forma de potencia:

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$

b) $10 \cdot 10 =$

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

d) $a \cdot a \cdot a \cdot a =$

e) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

f) $4 \cdot 4 \cdot 4 =$

Actividad 21

Expresa y calcula:

a) $4^2 =$

b) $6^3 =$

c) $5^4 =$

d) 2^5

SOLUCIONES A LAS TAREAS PROPUESTAS

Actividad 1

	Fracción	Numerador	Denominador
a) Dos tercios	$\frac{2}{3}$	2	3
b) Tres cuartos	$\frac{3}{4}$	3	4
c) Cinco séptimos	$\frac{5}{7}$	5	7
d) Ocho novenos	$\frac{8}{9}$	8	9
e) Un sexto	$\frac{1}{6}$	1	6

Actividad 2

Indicaremos con flechas la operación realizada en cada igualdad:

$$\frac{6}{10} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{3}{5} \qquad \frac{12}{28} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{6}{14} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{3}{7} \qquad \frac{90}{150} \overset{:10}{\underset{:10}{=}} \frac{9}{15} \overset{:3}{\underset{:3}{=}} \frac{3}{5} \qquad \frac{27}{18} \overset{:3}{\underset{:3}{=}} \frac{9}{6} \overset{:3}{\underset{:3}{=}} \frac{3}{2} \qquad \frac{66}{110} \overset{:11}{\underset{:11}{=}} \frac{6}{10} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{3}{5} \qquad \frac{24}{56} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{12}{28} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{6}{14} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{3}{7}$$

Por tanto, las siguientes 3 fracciones son equivalentes:

$$\frac{6}{10} = \frac{90}{150} = \frac{66}{110}$$

Las siguientes dos, también:

$$\frac{12}{28} = \frac{24}{56}$$

Finalmente, la fracción

$$\frac{27}{18}$$

no es equivalente a ninguna de las anteriores.

Actividad 3

$$\frac{6}{12} \rightarrow m.c.d.(6,12) = 6 \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{54}{81} \rightarrow m.c.d.(54,81) = 27 \rightarrow \frac{54}{81} = \frac{54:27}{81:27} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{40}{320} \rightarrow m.c.d.(40,320) = 40 \rightarrow \frac{40}{320} = \frac{40:40}{320:40} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{180}{640} \rightarrow m.c.d.(180,640) = 20 \rightarrow \frac{180}{640} = \frac{180:20}{640:20} = \frac{9}{32}$$

Actividad 4

$\frac{3}{7} > \frac{3}{9}$, $\frac{2}{5} < \frac{6}{5}$, $\frac{3}{9} < \frac{3}{4}$, $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

Actividad 5

a) Descomponemos factorialmente los denominadores y calculamos el m.c.m. de estos:

$4 = 2^2$; $5 = 5$; $6 = 2\cdot 3 \rightarrow$ m.c.m. $(4,5,6) = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$.

Reescribimos las fracciones y calculamos la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15\cdot 3}{60}+\frac{12\cdot 2}{60}+\frac{10\cdot 1}{60}=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}+\frac{10}{60}=\frac{79}{60}$$

b) Descomponemos factorialmente los denominadores y calculamos el m.c.m. de estos:

$5 = 5$; $10 = 2\cdot 5$; $15 = 3\cdot 5 \rightarrow$ m.c.m. $(5,10,15) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$.

Reescribimos las fracciones y calculamos la suma:

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}+\frac{-3}{15}=\frac{3\cdot 6}{30}+\frac{3\cdot 3}{30}-\frac{3\cdot 2}{60}=\frac{18}{30}+\frac{9}{30}-\frac{6}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

Actividad 6

a) El m.c.m. $(4,6,8) = 2^3\cdot 3 = 24$.

$$-\frac{6}{4}-\frac{4}{6}-\frac{1}{8}=-\frac{6\cdot 6}{24}-\frac{4\cdot 4}{24}-\frac{1\cdot 3}{24}=-\frac{36}{24}-\frac{16}{24}-\frac{3}{24}=-\frac{55}{24}$$

b) El m.c.m. $(2,4,6) = 2^2\cdot 3 = 12$.

$$\frac{13}{2}-\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{13\cdot 6}{12}-\frac{1\cdot 3}{12}-\frac{5\cdot 2}{12}=\frac{78}{12}-\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{65}{12}$$

Actividad 7

$$a)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{5}=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$$

$$b)\ \frac{7}{21}\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{168}=\frac{7}{56}=\frac{1}{8}$$

Actividad 8

$$a)\ \frac{1}{5}:\frac{25}{75}=\frac{1\cdot 75}{5\cdot 25}=\frac{75}{125}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

$$b)\ \frac{4}{18}:\frac{12}{24}=\frac{4\cdot 24}{18\cdot 12}=\frac{96}{216}=\frac{48}{108}=\frac{24}{54}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

Actividad 9

a) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=3+\frac{1}{4}-2-\frac{1}{6}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{12+3-2}{12}=\frac{13}{12}$

b) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{3+4}{12}\right)=\frac{1}{2}:\frac{7}{12}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

c) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=\left(\frac{5-3}{3}\right)\cdot\left(\frac{7-4}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$

d) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3+2}{4}\right):\left(\frac{10+1}{6}\right)=\frac{5}{4}:\frac{11}{6}=\frac{30}{44}=\frac{15}{22}$

Actividad 10

57.1

Parte entera: **57** Parte decimal: **1**

5.75

Parte entera: **5** Parte decimal: **75**

235.89

Parte entera: **235** Parte decimal: **89**

Actividad 11

57.359 ⟶ A las décimas.

Truncamiento: **57,3** Redondeo: **57,4**

5.0075 ⟶ A las centésimas

Truncamiento: **5** Redondeo: **5,01**

23.0535 ⟶ A las centésimas.

Truncamiento: **23,05** Redondeo: **23,05**

Actividad 12

a) 57,28 + 35,2 + 4,257 = 96,737

b) 15,75 – 3,251 = 12,499

c) 9,35 + 35,1 – 3,2 = 41,25

Actividad 13

a) 15,3 · 12,71 = 194,463

b) 7,67 · 6,832 = 52,40144

c) 6 · 9,876 = 59,256

d) 32,5 · 0,92 = 29,9€

Actividad 14

a) 61,7 : 15 = 4,11

b) 43,9 : 32 = 1,37

c) 57,5 : 35 = 1,64

d) 2,4 : 7 = 0,34

Actividad 15

a) 34,9 : 2,3 = 15,17

b) 1,26 : 5,1 = 0,24

c) El tío de Andrés quiere repartir 14,52 euros entre sus tres sobrinos. ¿Cuánto dará a cada uno? 4,84€.

d) Hemos comprado varios litros de leche pagando por la compra 20,4 euros. Si cada litro cuesta 0,85 €, ¿cuántos litros hemos comprado? 24 litros.

Actividad 16

$$\frac{3}{5} \cdot 180 = \frac{540}{5} = 108 \rightarrow 180 - 108 = 72$$

Por tanto, le quedan 72€.

Actividad 17

125 · 3,3 + 140 · 0,32 + 45 · 1,2 + 130 · 0,52 = 412,5 + 44,8 + 54 + 67,6 = 578,9 calorías

578,9 < 600. Por tanto, sí respetó el régimen.

Actividad 18

Apartado a)

$$\textit{Partido A}: \frac{3}{11} \cdot 15400 = 4200 \textit{ votos}$$

$$\textit{Partido B}: \frac{3}{10} \cdot 15400 = 4620 \textit{ votos}$$

$$\textit{Partido C}: \frac{5}{14} \cdot 15400 = 5500 \textit{ votos}$$

$$4200 + 4620 + 5500 = 14320 \textit{ votos} \rightarrow \textit{Partido D}: 15400 - 14320 = 1080 \textit{ votos}$$

Apartado b)

El número de absentistas del censo electoral será:

$$1-\frac{5}{8}=\frac{8-5}{8}=\frac{3}{8}$$

15400 $\rightarrow$ 5/8

x $\rightarrow$ 3/8

x = (15400 ·3)/ 5 = 9240. El número de absentistas es 9240.

Actividad 19

$$\textit{Mayor}:\ \frac{4}{9}\cdot 1800=\frac{7200}{9}=800€$$

$$\textit{Mediano}:\ \frac{1}{3}\cdot 1800=\frac{1800}{3}=600€$$

$$\textit{Menor}:\ 1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{9-4-3}{9}=\frac{2}{9}\rightarrow\frac{2}{9}\cdot 1800=\frac{3600}{9}=400€$$

Actividad 20

a) 6·6·6·6·6 = 6 elevado a 5.

b) 10·10 = 10 elevado a 2.

c) 2·2·2·2·2·2·2 = 2 elevado a 7.

d) a·a·a·a = a elevado a 4.

e) 7·7·7·7 = 7 elevado a 4.

f) 4·4·4 = 4 elevado a 3.

Actividad 21

a) 4^2 = 16.

b) 6^3 = 216.

c) 5^4 = 625.

d) 2^5 = 32.

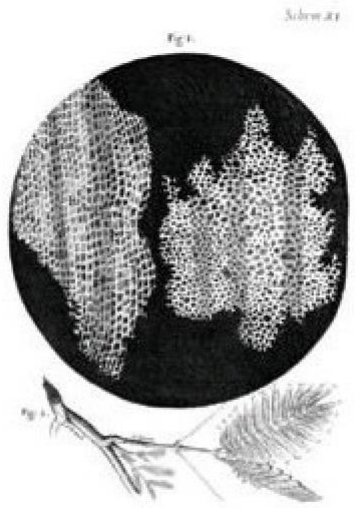
PARTE 1
TEMA 3 – LA CÉLULA

ÍNDICE

1. LA CÉLULA. CARACTERÍSTICAS. 2
2. LA TEORÍA CELULAR. CLASIFICACIÓN. 3
2.1. La célula procariota. 5
2.2. La célula eucariota. 6
2.3. Diferencias entre la célula animal y vegetal. 10
2.3.1. La célula animal. 11
2.3.2. La célula vegetal. 11
SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS 14

1. LA CÉLULA. CARACTERÍSTICAS.

La primera observación de *células* fue realizada por *Robert Hooke* en el s. XVII. Gracias al *microscopio* se conoce la estructura de los seres vivos.



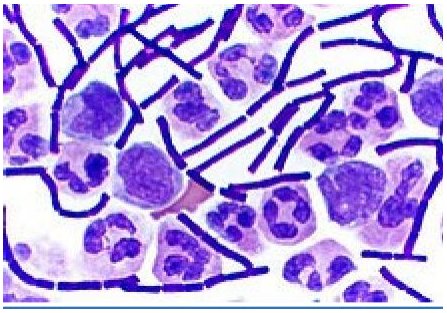
Dibujo de la estructura del corcho observado por Hooke al microscopio

La **célula** es la **unidad funcional y estructural de un ser vivo**. Es la *unidad funcional* porque puede realizar las tres *funciones vitales*: *nutrición*, *relación* y *reproducción*. Y es la unidad estructural ya que sabemos que todos los seres vivos están formados por *células*.

La **célula** es la **unidad más elemental de un ser vivo**. Las *células* de los seres vivos no son todas iguales, presentan una amplia variedad de tamaños y formas, pero todas presentan una estructura básica compuesta por:

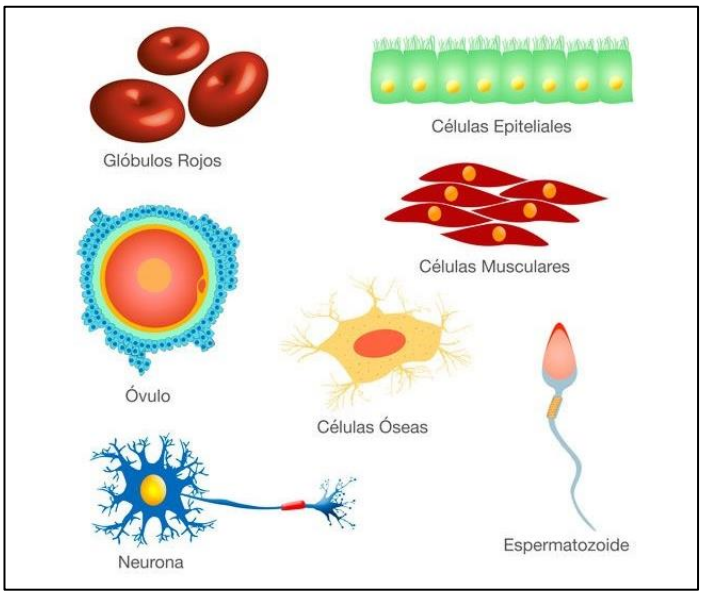
- **Membrana**. Es una fina capa que separa la célula del medio externo y se encarga de regular la entrada y salida de sustancias de la célula.
- **Citoplasma**. Es la sustancia que rellena el interior de la célula y en él se encuentran los *orgánulos*. Es donde se producen la mayoría de las reacciones químicas vitales de la célula.
- **El material genético**. El *material genético* de las células es el **ADN**, una sustancia química compleja que contiene la información necesaria para regular el funcionamiento de la célula. Este *material genético* puede estar contenido en un *núcleo* o no.

El **tamaño** de las células en general es microscópico, entre 1 y 20 micras (1 micra=0,000001 m). No obstante, hay células de gran tamaño y de gran magnitud como la yema del huevo del avestruz o algunas neuronas que sobrepasan el metro. El tamaño de la célula es independiente del tamaño del individuo.



Comparativa de tamaño entre neutrófilos, células sanguíneas eucariotas (de mayor tamaño), y bacterias Bacillus anthracis, procariotas (de menor tamaño, con forma de bastón).

En cuanto a su **forma,** puede ser muy variada, ya que tienden a adoptarla según la función que realizan. Ejemplos: Las células de la piel son aplanadas, las células de los músculos son alargadas y las células de las grasas son redondas, etc.



Ejemplos de células con diferentes formas.

Actividad 1

¿Tienen todas las células el mismo tamaño y forma?

2. LA TEORÍA CELULAR. CLASIFICACIÓN.

La *teoría celular* se basó en los adelantos realizados mediante los aparatos de observación (microscopios) debidos inicialmente a *Robert Hooke* (1635-1703) y a *Anton Van Leeuwenhoek* (1632-1723).

En el siglo XIX *Matthias Schleiden* (1804-1881) y *Theodor Schwann* (1810-1882) proponen la *Teoría Celular*, con sus dos primeras afirmaciones. Posteriormente *Rudolph Virchow* (1821-1902) completa la teoría con la tercera afirmación. Ellos fueron los primeros que postularon el planteamiento de que los organismos vivos se componen por células.

Por último, *Ramón y Cajal* (1852-1934) con sus investigaciones sobre el tejido nervioso termina de completar esta teoría.

Los postulados en los que se basa la **teoría celular** son, en líneas generales los siguientes:

1. **Todo en los seres vivos están formados por una o más células**, o bien por sus productos de secreción. **La célula es la unidad anatómica de la materia viva**. Los organismos pueden tener una sola célula (*unicelulares*) o más de una (*pluricelulares*).
2. Todas las funciones vitales ocurren dentro de las células o en su entorno inmediato. La célula es la unidad fisiológica de la vida.
3. **Todas las células proceden de otras células preexistentes**, por división de éstas.
4. **Cada célula contiene toda la información hereditaria necesaria para el control de su desarrollo y funcionamiento**, y esta información pasa de la célula madre a las hijas.

Aplicando la *teoría celular*, sabemos que todos los organismos están compuestos por células, pero las células pueden ser de distintos tipos. Además, los seres vivos pueden estar formados de una o más células.

Las células, atendiendo al *grado de complejidad* que presentan en su estructura. se clasifican en:

- **Células procariotas**: Son todas aquellas cuyo material genético no se encuentra protegido por una *membrana* y el *citoplasma* no está compartimentado. Es el tipo celular más sencillo.
- **Células eucariotas**: Son todas aquellas cuyo material genético se encuentra en el interior de una estructura, el *núcleo*, protegido por una membrana. El *citoplasma* está compartimentado. Es el tipo celular más complejo.

Los organismos están formados por células. Según el número de ellas que presenten puedenser de dos tipos:

- **Organismos unicelulares**: Son aquellos que están formados por una sola célula. La célula realiza todas las funciones vitales. Pueden ser *procariotas* o *eucariotas*. Un ejemplo de este tipo de organismos son las *bacterias*, las *algas cianofíceas*, los *protozoos* y muchas *algas eucariotas*. A veces viven en grupos estables, denominados colonias. En este caso, unas células realizan un tipo de función y otras células otro. Sin embargo, cada célula puede vivir de forma independiente de la colonia, asumiendo todas las funciones vitales.
- **Organismos pluricelulares**: Son seres vivos, todos ellos *eucariotas*, formados por muchas células. Todas las células del organismo han surgido a partir de una única célula que ha formado a las demás. Por ello, todas las células presentan la misma información genética, aunque no la expresen de la misma manera. Las células no sobreviven aisladas, ya que pierden algunas capacidades, con el fin de especializarse en una función concreta. Así se forman los distintos **tejidos** que pueden formar un organismo pluricelular. Un ejemplo de *organismos pluricelulares* son los *animales*, incluida la especie humana, las *plantas*, los *hongos* y muchas *algas eucariotas*.

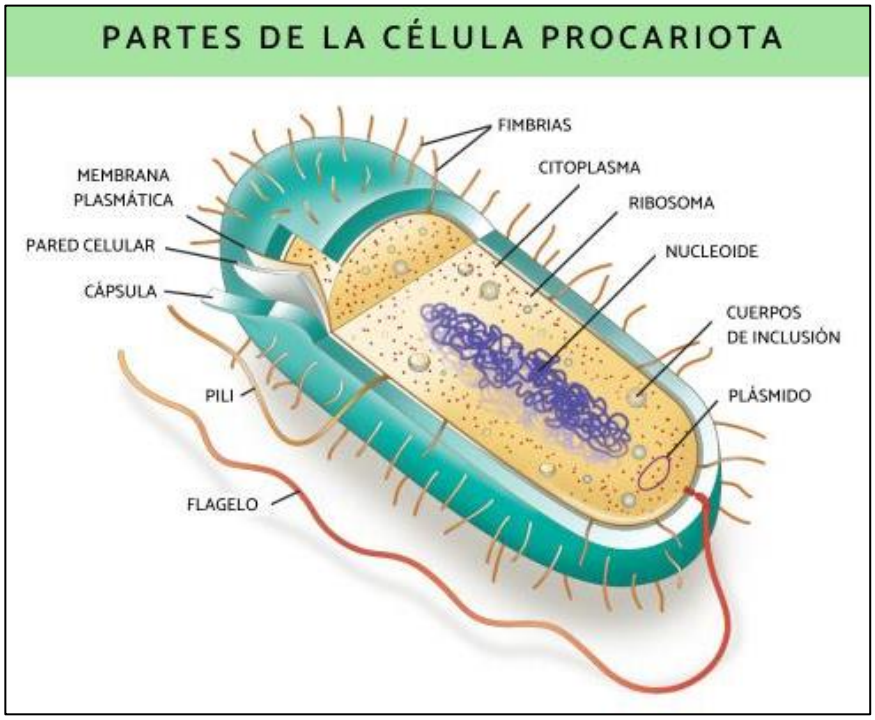
Actividad 2

Clasifica los seres vivos atendiendo a su complejidad en cuanto al número de células quelos forman.

2.1. La célula procariota.

Las **células procariotas no tienen núcleo** que proteja al *material genético*. Los organismos procariotas son las *bacterias* y las *algas cianofíceas*. Todos ellos pertenecen al *Reino Moneras*. Estos son organismos unicelulares, muy pequeños, cuya longitud suele estar comprendida entre 1 y 10 µm. Generalmente presentan las siguientes partes:

- Cuentan con una envoltura exterior rígida, la **pared celular**, que rodea la *membrana plasmática* y da forma a la célula. Muchas también presentan una **cápsula** o **capa viscosa** hecha de polisacáridos.
- **Membrana plasmática** que les separa del medio donde viven y que controla el paso de sustancias. Algunas células presentan unas arrugas hacia su interior que se denominan **mesosomas**. En ellos se realiza gran cantidad de actividades celulares, como fijar el ADN, realizar la respiración celular, produciendo energía o controlar la división de la célula.
- Su **citoplasma** no contiene orgánulos, a excepción de **ribosomas**, que son de menor tamaño que los de las células eucariotas. Está lleno de agua y contiene gran cantidad de sustancias disueltas, gotas de lípidos u otras sustancias de reserva como el almidón. En el *citoplasma* se realizará el conjunto de reacciones químicas que le permiten a la célula sobrevivir. Esto es, el *metabolismo celular*.
- **Ribosomas**, son los lugares donde se construyen las proteínas.
- Cuentan con una gran **molécula de ADN** que ocupa una región llamada **nucleoide** y, en ocasiones, con pequeños fragmentos de ADN llamados **plásmidos**. El ADN se encuentra formando una estructura circular y constituye el único cromosoma de la célula.
- Algunas especies tienen prolongaciones, como los **flagelos**, que son largos y sirven poder desplazarse en el medio, o las **fimbrias**, que son cortas, que sirven como medio de adhesión a las células.



Actividad 3

Describe brevemente la célula procariota.

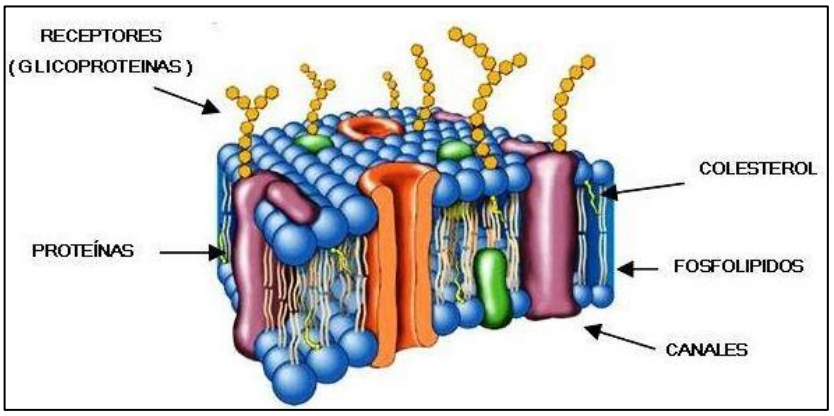
2.2. La célula eucariota.

Los organismos con *células eucariotas* pertenecen a los *reinos protoctistas, hongos, plantas y animales*, y pueden ser *unicelulares* o *pluricelulares*. El tamaño de las células eucariotas está comprendido entre 10 y 100 µm.

La **célula eucariota sí tiene un núcleo** rodeado por una membrana, dentro del cual se encuentra el *material genético* o *ADN*. La mayor parte de las células son eucariotas, como las células de los animales y de las plantas, y en ellas podemos distinguir tres partes fundamentales:
Membrana, Citoplasma y Núcleo.

a) Membrana plasmática.

Es una doble capa que recubre la célula, separándola del medio que la rodea, formada por **lípidos**, **proteínas** y una pequeña proporción de **glúcidos**, que regula el intercambio de sustancias entre el interior y el exterior de la misma. La membrana celular es semipermeable y presenta una serie de **poros** que permiten realizar dicho intercambio.



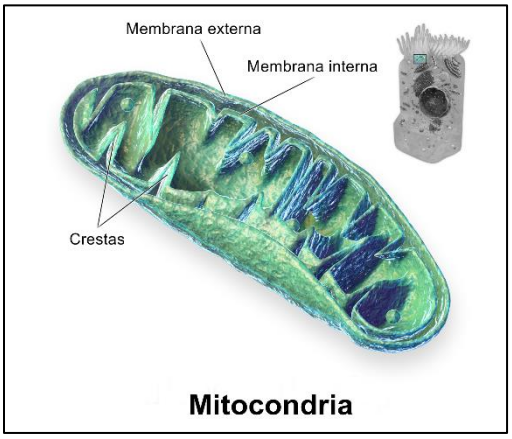
Estructura y componentes de la membrana plasmática.

Las células de los *hongos*, las de las *algas* y las de las *plantas* tienen una envoltura externa llamada **pared celular**. En las *células vegetales* es una *pared de celulosa* que les da una mayor consistencia.

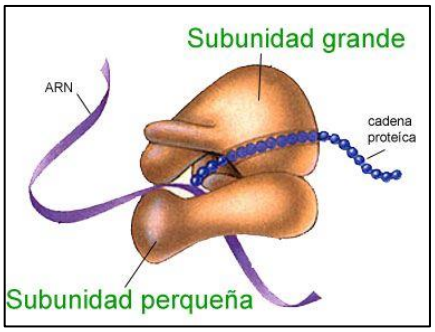
b) Citoplasma.

Es el medio interno de la célula, donde tiene lugar algunas reacciones químicas del **metabolismo** celular. En el *citoplasma* se encuentran gran variedad de **orgánulos** (órganos pequeños) y estructuras comunes, cuya morfología y función se resumen a continuación:

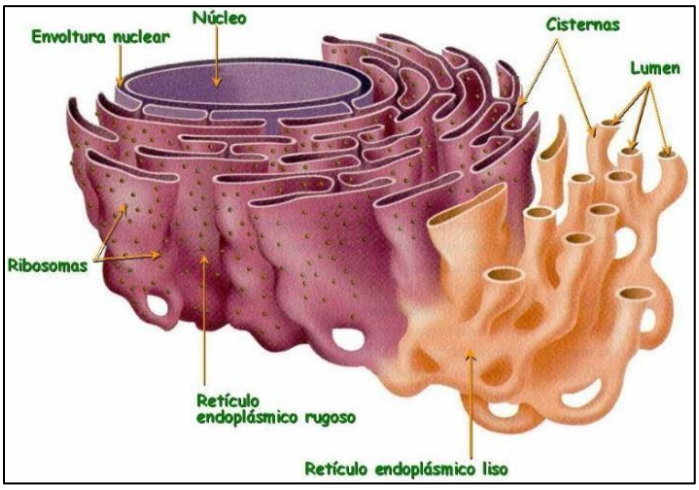
- **Mitocondrias**. Las *mitocondrias* tienen una doble membrana: la exterior es lisa y la interior se pliega en forma de crestas. En las mitocondrias tiene lugar la **respiración celular**, que es un proceso en el que se queman nutrientes en presencia de oxígeno, para obtener energía que la célula necesita para realizar todas sus funciones, y se desprende CO_2.



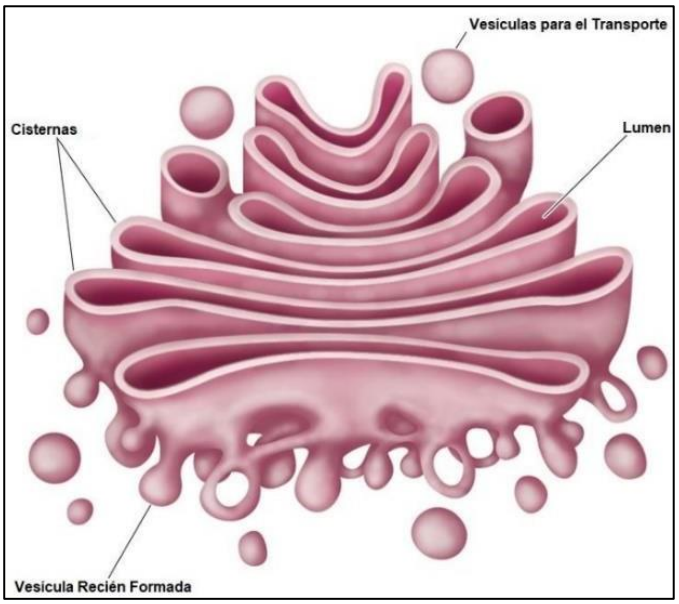
- **Ribosomas**. Los *ribosomas* están formados por dos subunidades. Son los orgánulos más pequeños de la célula. Los ribosomas **fabrican las proteínas de la célula**, gracias a la información suministrada por el *ARN mensajero*.

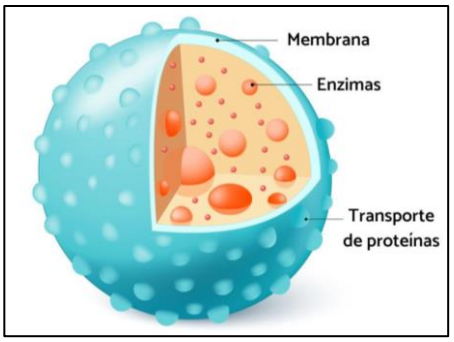


- **Retículo endoplasmático**. El retículo endoplasmático (RE) lo forman un conjunto de túbulos, sacos y canales comunicados entre sí. Está pegado a la *membrana nuclear*. El *retículo endoplásmico* puede ser rugoso o liso:
  - **Retículo endoplasmático rugoso (RER)**: El *retículo endoplasmático rugoso* fabrica proteínas mediante los ribosomas que están unidos a su membrana, y las almacena o las transporta al *aparato de Golgi*.
  - **Retículo endoplasmático liso (REL)**: No tiene ribosomas en él y produce lípidos y otras sustancias que necesita la célula.



- **Aparato de Golgi**. El *aparato de Golgi* lo forman una serie de sacos membranos aplanados y apilados, de los que parten *vesículas*. El **aparato de Golgi** reúne sustancias y, mediante las **vesículas**, las transporta a las distintas partes de la célula o al exterior de ella.

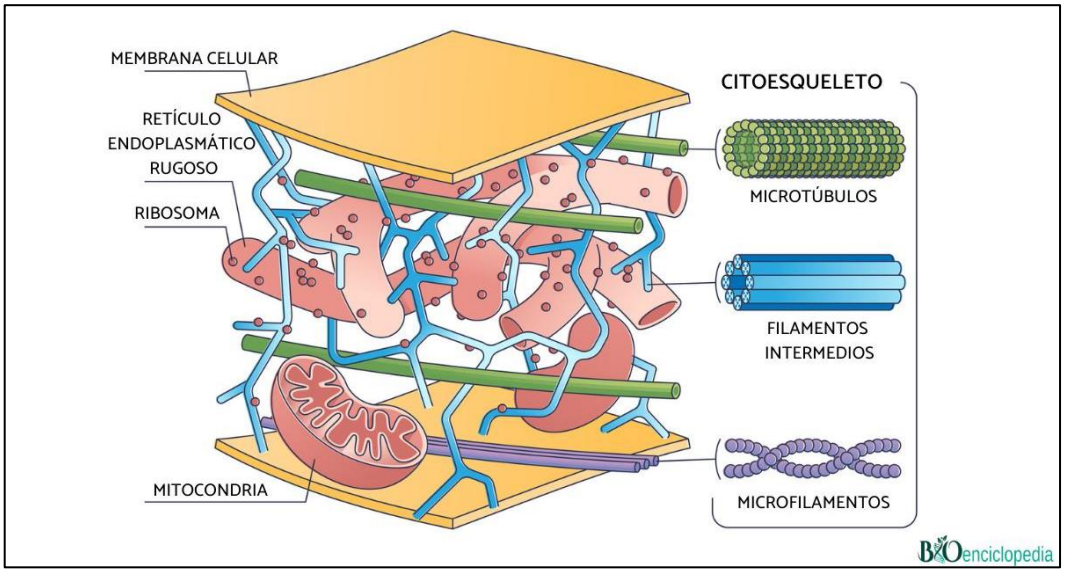




- **Lisosomas**. Los *lisosomas* son vesículas procedentes del *Aparato de Golgi*, llenas de sustancias digestivas. Los lisosomas realizan la **digestión celular**, es decir, descomponen sustancias y obtienen, a partir de ellas, sustancias útiles para la nutrición de la célula.

- **Vesículas**. Otras *vesículas* relacionadas con la actividad del *Aparato de Golgi* contienen distintos tipos de sustancias. Estas tienen diversas funciones, como almacenar sustancias, transportarlas,…

- **Citoesqueleto**. Es una red de microtúbulos y filamentos que da soporte a la membrana plasmática y forma a la célula y (en muchos tipos de células) permite que la célula se desplace. También ayuda a posicionar correctamente los orgánulos.

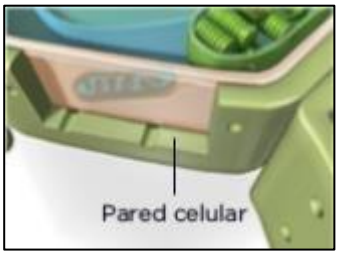


- **Vacuolas**. Las *vacuolas* son *vesículas membranosas* que acumulan sustancias de reserva o de deshecho. Las *células vegetales* tienen grandes vacuolas y en las *células animales* son pequeñas. Las *grandes vacuolas* están rellenas de un líquido formado por agua, sales, azúcares y proteínas. El líquido que contiene la vacuola ejerce una presión en el interior celular que es importante para mantener la rigidez de la célula vegetal.

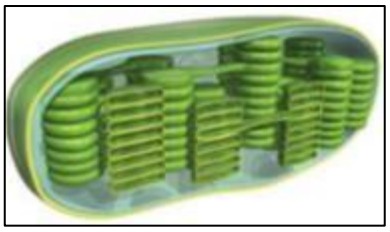
Estructura y función de *orgánulos* y otras estructuras no comunes en las *células eucariotas*:

- **Centriolos**. Los *centríolos* son orgánulos tubulares (agrupados de dos en dos) que se encuentran normalmente en el **centrosoma**, un área del citoplasma cerca del núcleo. En este *centrosoma* hay dos *centriolos*. Los *centriolos* son estructuras compuestas de microtúbulos que cumplen una función muy importantes en la división celular. Dirigen la separación de los *cromosomas* durante la división celular. Intervienen en las estructuras que producen movimientos celulares, como los *cilios* y los *flagelos*.

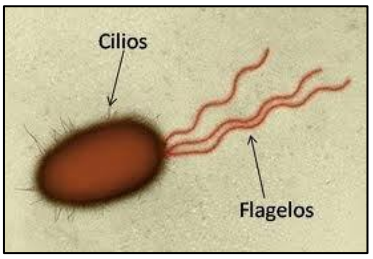
- **Pared celular**. La pared celular es una envoltura externa a la membrana plasmática. Algunas células eucariotas presentan esta estructura (la de las plantas, las algas y la de los hongos), siendo su composición diferente según el tipo de célula. Protege y proporciona rigidez a la célula.



- **Cloroplastos**. Los *cloroplastos* son orgánulos con forma ovalada. Están rodeados por dos membranas lisas. En su interior hay unos sacos aplanados que contienen un pigmento llamado *clorofila*, que les da el color verde y que es capaz de transformar la energía de la luz solar en energía química. Este proceso recibe el nombre de **fotosíntesis**.



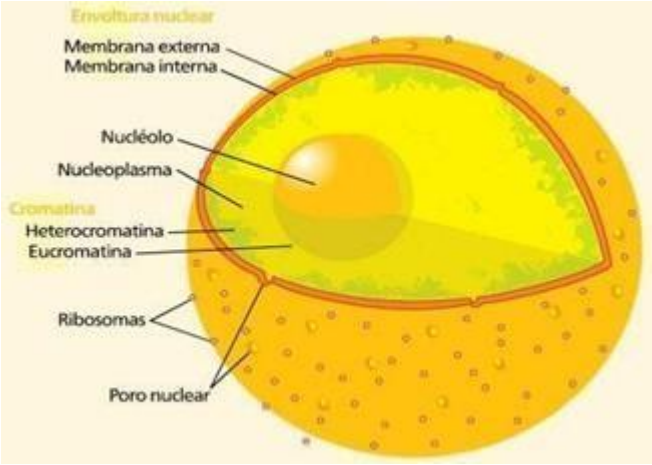
- **Cilios y flagelos**. Los *cilios* y los *flagelos* consisten en un tallo cilíndrico cubierto por una extensión de la membrana plasmática. Cuando estos apéndices son relativamente cortos y muy numerosos se denominan **cilios**. Cuando son largos, y la célula tiene uno o apenas unos cuantos, se denominan **flagelos**. Sirven para que la célula se mueva en un ambiente líquido o para que desplace



líquidos y partículas a lo largo de su superficie.

c) **Núcleo.** Tiene forma más o menos esférica y está situado en la parte central (célula animal) o desplazado hacia la periferia (célula vegetal). El núcleo cumple dos funciones fundamentales: contiene la **información hereditaria** que determina las características de las células y las de los organismos de los que forman parte, y controla las **actividades celulares**. En el *núcleo* se distinguen las siguientes estructuras:

- **Membrana nuclear**. Es una envoltura formada por dos membranas cuya superficie está cubierta por numerosos *ribosomas* (orgánulos que fabrican las proteínas celulares). Esta membrana tiene unas perforaciones, denominadas **poros nucleares**, que permiten el intercambio de sustancias entre el *núcleo* y el *citoplasma*.
- **Nucleoplasma**. Es el líquido nuclear.
- **Nucleolo**. Es una estructura redondeada cuyo color es más oscuro que el resto del núcleo. En él se fabrican los componentes de los ribosomas.
- **Cromatina**. Está formada por filamentos de **ADN y proteínas**. Durante la *división celular*, se condensa y forma los **cromosomas**. Existen tantos *filamentos de cromatina* como *cromosomas* presentará la célula en su fase de división.

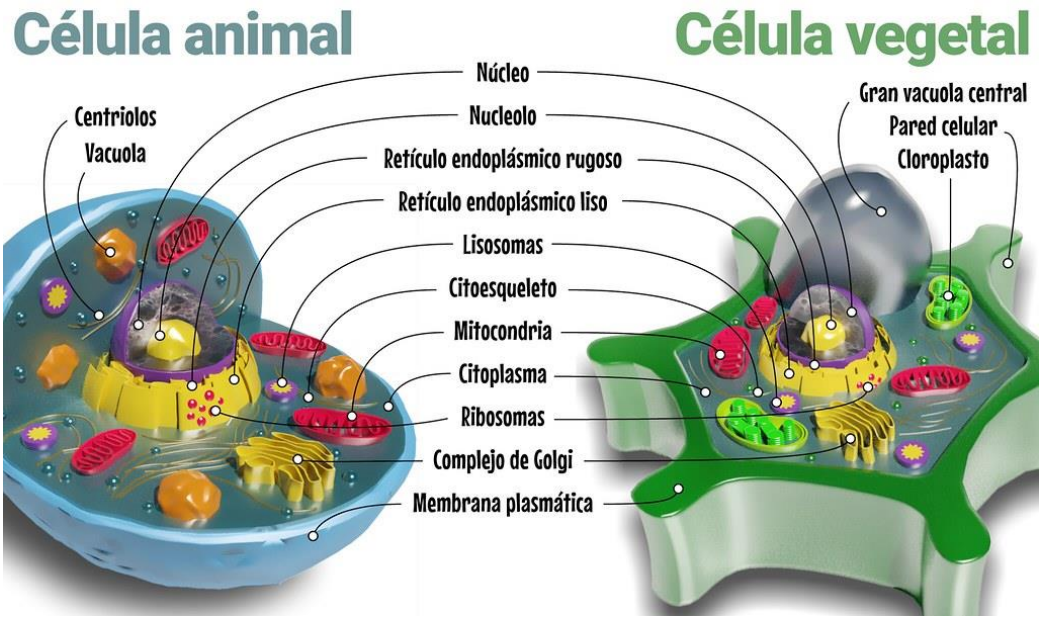


Actividad 4

Describe brevemente la célula eucariota.

2.3. Diferencias entre la célula animal y vegetal.

Las diferencias que podemos encontrar en cuanto a la composición y estructura se basan fundamentalmente en la ausencia y presencia de orgánulos según el tipo de célula (**animal** o **vegetal**), y en algunos casos también en la composición de algunos orgánulos o estructuras como la *membrana celular*.



2.3.1. La célula animal.

La **célula animal** es una *célula eucariota* caracterizada por la presencia de *núcleo*, *membrana plasmática* y *citoplasma*. Se diferencia de la *célula vegetal* por la **ausencia de pared celular y cloroplastos**. Además se pueden encontrar **vacuolas más pequeñas** y más abundantes en comparacióncon las de una *célula vegetal*.

Las *células animales* pueden adoptar diversas formas. Su *núcleo* suele ocupar más o menos una posición central y entre sus orgánulos se encuentran los **centriolos**.

La **nutrición** de las células animales es **heterótrofa**, lo que quiere decir que necesitan obtener nutrientes y energía del material orgánico de otros seres vivos.

2.3.2. La célula vegetal.

La **célula vegetal** es una *célula eucariota* que se caracteriza por la **presencia de una pared celular** que le da soporte y protección, compuesta principalmente de celulosa, a la vez que permite la comunicación celular. Esta pared puede encontrarse en otros tipos de células eucariotas.

Al igual que la *célula animal*, presenta un *núcleo diferenciado*, *membrana* y *citoplasma*. Sin embargo, la célula vegetal contiene **cloroplastos** que se encargan del proceso de la **fotosíntesis**. Algo fundamental, pues permite a las plantas liberar el oxígeno que los seres vivos necesitan para existir.

La **nutrición** de las *células vegetales* es **autótrofa**, por lo que son capaces de sintetizar todos los nutrientes que necesitan a partir dematerial inorgánico.

La *célula vegetal* tiene **vacuolas grandes** que pueden ocupar gran parte del *citoplasma*. Sufunción es almacenar agua y mantener la turgencia de la célula.

Su núcleo, a veces, está desplazado hacia la periferia. **No tiene centriolos**.

Actividad 5

Enumera las diferencias principales entre célula eucariota y procariota.

Actividad 6

Enumera las diferencias principales entre célula animal y vegetal.

Actividad 7

Explica las funciones principales de los orgánulos que podemos encontrar en el citoplasma de la célula eucariota.

Actividad 8

Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes frases sobre las células:

- Las *células eucariotas* poseen *mitocondrias*.
- Las *células vegetales* no presentan *centrosomas.*
- Las *células animales* carecen de *ribosomas*.
- La *pared celular* está presente en todas las *células eucariotas*.
- La *membrana celular* está presente en todas las *células eucariotas*.
- Los *cloroplastos* se encuentran en las *células eucariotas animales*.

Actividad 9

Completa con las palabras adecuadas las siguientes frases:

Todo ser vivo está formado por una o muchas _____. La célula es la estructura más _____ que cumple con todas las funciones _____. Existen dos tipos fundamentales de células: la célula _____, sin _____ y pocos orgánulos celulares y la célula _____ con núcleo y muchos y variados _____ celulares.

Actividad 10

Enumera los principios en los que se basa la Teoría celular.

Actividad 11

Escribe a qué orgánulo celular se refieren las siguientes afirmaciones:

- Son las fábricas de proteínas de las células.
- Son unas estructuras con forma cilíndrica que intervienen en la división celular de las célulasanimales.
- Intervienen en el proceso digestivo de la célula.
- Realizan la respiración celular, transformando la materia orgánica en la energía que la célulanecesita para realizar todas sus funciones.
- Acumulan sustancias de reserva o de deshecho.

Actividad 12

Relaciona la función que aparece en la columna de la izquierda con los orgánulos de la columna de la derecha.

Almacena sustancias de reserva	Citoplasma
Respiración celular	Ribosomas
Se fabrican en el nucléolo	Retículo
Medio interno de la célula	Mitocondrias
Puede ser liso o rugoso	Vacuolas

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Actividad 1

No, suelen ser muy pequeñas, pero pueden ser tan grandes como el huevo de un avestruz y adoptar distintas formas según la función que cumplan.

Actividad 2

Unicelulares, formados por una sola célula y *pluricelulares*, formados por más de una.

Actividad 3

Las **células procariotas** son las unidades básicas de algunos seres vivos, como algunas bacterias. Son células sin núcleo celular definido, es decir cuyo material genético (como el ADN) se encuentra disperso en el citoplasma. La célula contiene gran número de ribosomas, que llevan a cabo la síntesis de proteínas. Alrededor de la célula hay una membrana plasmática. Las células procariotas estructuralmente son las más simples y pequeñas.

Actividad 4

Las **células eucariotas** poseen una membrana que las recubre y protege del ambiente exterior y un núcleo celular definido y delimitado por una membrana nuclear, cuyo interior contiene el material genético (ADN y ARN) del organismo. Disperso en el citoplasma se encuentran numerosos orgánulos. Son las células que poseen las plantas y animales.

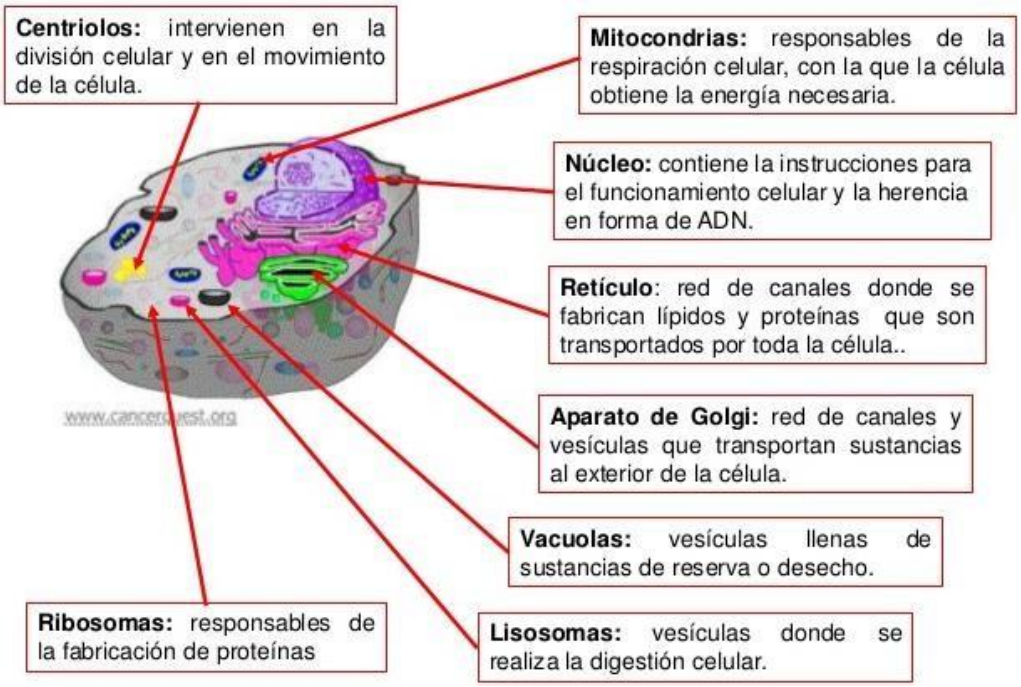
Actividad 5

Células eucarióticas	Células procariotas
La **célula animal NO posee pared celular**; la **célula vegetal** tiene pared de **celulosa**	Posee **pared celular**
Núcleo presente; el material genético se encuentra "encerrado" por la membrana nuclear.	**Núcleo ausente**; el material genético se encuentra disperso en el citoplasma, ubicado en la región nuclear.
El **ADN** se organiza en **varios cromosomas lineales**, cuyo número varía según la especie.	El **ADN** se dispone en **una sola molécula circular.**
Uno o más nucléolos, formados por ARN y proteínas.	**No hay nucléolo.**
Hay ribosomas (de mayor tamaño que en procariotas) **y orgánulos membranosos** tales como mitocondrias, lisosomas, retículo endoplasmático, aparato de Golgi; en la célula vegetal también puede haber plastos, como los cloroplastos.	Los **únicos orgánulos son los ribosomas** (de menor tamaño que en eucariotas). **No hay orgánulos membranosos.**
Las **enzimas y pigmentos** se encuentran en orgánulos membranosos, tales como **mitocondrias, lisosomas o cloroplastos.**	Las **enzimas y pigmentos** se encuentran en **repliegues de la membrana plasmática.**
Poseen célula eucariota **los animales, las plantas, los hongos, los protozoarios y las algas.**	Poseen célula **procariota las bacterias, las cianobacterias y las arqueas.**

Actividad 6

CÉLULA ANIMAL	CÉLULA VEGETAL
Sin **PARED CELULAR**	Con **PARED CELULAR**
Con **MEMBRANA PLASMÁTICA**	Con **MEMBRANA PLASMÁTICA**
Con **CITOPLASMA**	Con **CITOPLASMA**
Con **citoesqueleto**	Con **citoesqueleto**
Con **retículo endoplasmático liso**	Con **retículo endoplasmático liso**
Con **retículo endoplasmático rugoso**	Con **retículo endoplasmático rugoso**
Con **aparato de Golgi**	Con **aparato de Golgi**
Con **ribosomas**	Con **ribosoma**
Con **mitocondrias**	Con **mitocondrias**
Con **lisosomas**	Sin **lisosomas** (no hacen digestión)
Con **vacuolas** (menos desarrolladas)	Con **vacuolas** (más desarrolladas)
Con **centrosoma**	Sin **centrosoma**
Sin **plastos** (no hacen la fotosíntesis)	Con **plastos**
Con **MEMBRANA NUCLEAR**	Con **MEMBRANA NUCLEAR**
Con **NÚCLEO**	Con **NÚCLEO**
Con **nucleoplasma**	Con **nucleoplasma**
Con **nucléolo**	Con **nucléolo**
Con **cromosomas**	Con **cromosomas**

Actividad 7



Actividad 8

- Las células eucariotas poseen mitocondrias. (V)
- Las células vegetales no presentan centrosomas. (V)
- Las células animales carecen de ribosomas. (F)
- La pared celular está presente en todas las células eucariotas. (F)
- La membrana celular está presente en todas las células eucariotas. (V)
- Los cloroplastos se encuentran en las células eucariotas animales. (F)

Actividad 9

Todo ser vivo está formado por una o muchas [células]. La célula es la estructura más [pequeña] que cumple con todas las funciones [vitales]. Existen dos tipos fundamentales de células: la célula [procariota], sin [núcleo] y pocos orgánulos celulares y la célula [eucariota] con núcleo y muchos y variados [orgánulos] celulares.

Actividad 10

- La célula es la unidad estructural de todos los seres vivos; es decir, es a partir de la cual se forman todos los seres vivos.
- La célula es la unidad funcional de los seres vivos; es decir, ella sola puede realizar todas las actividades para mantenerse viva.
- Toda célula se forma de otra célula por división.

Actividad 11

- Son las fábricas de proteínas de las células → **Ribosomas**.
- Son unas estructuras con forma cilíndrica que intervienen en la división celular de las células animales → **Centriolos**.
- Intervienen en el proceso digestivo de la célula → **Lisosomas**.
- Realizan la respiración celular, transformando la materia orgánica en la energía que la célula necesita para realizar todas sus funciones → **Mitocondrias**.
- Acumulan sustancias de reserva o de deshecho → **Vacuolas**.

Actividad 12

Almacena sustancias de reserva	Citoplasma
Respiración celular	Ribosomas
Se fabrican en el nucléolo	Retículo
Medio interno de la célula	Mitocondrias
Puede ser liso o rugoso	Vacuolas

ACT PARTE 2

TEMA 4 – PROPORCIONALIDAD. INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO.

ÍNDICE

1. PROPORCIONALIDAD 2
1.1. Razones y proporciones. 2
1.2. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. 3
1.3. Regla de tres simple. 6
2. PORCENTAJES. 8
3. INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO. 10
3.1. Expresión algebraica. 11
3.2. Valor numérico de una expresión algebraica. 12
SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS 13

1. PROPORCIONALIDAD.

1.1. Razones y proporciones.

Tanto la *razón* como la *proporción* son dos conceptos matemáticos sumamente útiles en la vida cotidiana de cualquier individuo.

Una **razón** es una comparación entre dos cantidades (magnitudes). Puede expresarse mediante una división o fracción. Si las cantidades a comparar son **a** y **b**, la *razón* entre ellas se escribe como:

$$a:b=\frac{a}{b}$$

La *razón* entre *a* y *b*, siendo *b* un número distinto de cero, se lee "**a** es a **b**". El término *a* esel *antecedente* de la razón y el *b*, el *consecuente*.

El resultado de la división o cociente entre las cantidades a comparar se denomina *valor dela razón*.

$$\frac{a}{b}=valor\ de\ la\ razón$$

Ejemplo:

Si hay 33 vehículos entre automóviles y camionetas y la razón entre ellos es 4:7, ¿cuántos automóviles y camionetas hay?

En este caso se está comparando la cantidad de automóviles con el de camionetas. Paraconocer la cantidad de automóviles que hay podemos seguir los siguientes pasos:

1. Consideremos el total de vehículos: 33.
2. Dividamos 33 entre la suma del numerador y el denominador de nuestra razón (4+7= 11). Con esto obtenemos 11 partes con 3 unidades cada una (ya que 33:11 = 3).
3. Si consideramos 4 partes para los automóviles y 7 para las camionetas, tendremos 4·3 = 12 automóviles y 7·3 = 21 camionetas.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Sean **a**, **b**, **c** y **d** cuatro cantidades (magnitudes). La igualdad siguiente es una *proporción*:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Se lee: "**a** es a **b** como **c** es a **d**".

La **constante de proporcionalidad**, **k**, es el resultado del cociente de las razones de una proporción.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

Propiedades de las proporciones

1. En una *proporción*, el producto de los términos medios es igual al producto de los términos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow 2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$$

2. En una *proporción* la suma de *antecedentes* dividida por la suma de *consecuentes* es iguala cualquiera de las razones que componen la proporción.

   Ejemplo:

   Dada la siguiente proporción: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \rightarrow \frac{3+6}{4+8} \rightarrow \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

3. Si en una proporción cambian entre sí los medios o extremos la proporción no varía.

Actividad 1

Indica si las siguientes razones representan una proporción:

	V / F
$[\frac{3}{2}] = [\frac{9}{7}]$	
$[\frac{2}{5}] = [\frac{5}{16}]$	
$[\frac{6}{24}] = [\frac{1}{4}]$	
$[\frac{24}{6}] = [\frac{15}{4}]$	

1.2. Magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Para saber cuánto cuestan 3 Kg de naranjas, multiplicamos el precio de 1 Kg por 3. Si hacemos un trabajo de clase entre dos compañeros, tardamos la mitad de tiempo que si lo hacemossolos. Es decir, en la vida diaria utilizamos continuamente las **proporciones numéricas** entre magnitudes. Ten en cuenta que una **magnitud** es aquello que se puede medir.

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes **a** y **b** son **directamente proporcionales** cuando existe una constante **k** tal que:

$$\frac{a}{b} = k$$

La constante **k** se denomina **constante de proporcionalidad** o **razón**.

Es decir, decimos que dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al aumentar una de las magnitudes, la otra aumenta en la misma proporción o si una disminuye, la otra lo haceen la misma proporción.

Las variaciones de las magnitudes deben producirse según la **constante de proporcionalidad.**

Un ejemplo de *proporcionalidad directa* la vemos en la relación entre los kilos de manzanasque compramos y el precio que nos cuestan dichas manzanas.

Kg de manzanas	1	2	3	4	5
Precio	3	6	9	12	15

$$Constante\ de\ proporcionalidad = k = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \cdots$$

Ejemplo: Si 1 kg de manzanas cuesta 3€, ¿cuánto cuestan 10 kg? Se plantea así:

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{x}$$

Para resolver el problema utilizamos la propiedad de las proporciones que dice: "*el productode los términos medios es igual al producto de los términos extremos*". Es decir, multiplicamos en cruz los términos de la *proporción*.

$1 \cdot x = 10 \cdot 3 \rightarrow x = 30 \rightarrow$ 30€ cuestan los 10 kg de manzanas.

Existen diferentes cálculos en los cuales se debe aplicar la proporción directa: la *regla de tres simple y directa*, los *repartos directamente proporcionales* y los *porcentajes*.

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes **a** y **b** son **inversamente proporcionales** cuando existe una constante **k** tal que:

$$\boldsymbol{a \cdot b = k}$$

La constante **k** se denomina **constante de proporcionalidad**.

Es decir, dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al aumentar una de las magnitudes, la otra disminuye en la misma proporción o si una disminuye, la otra aumenta en la misma proporción.

Un ejemplo de *proporcionalidad inversa* la vemos en la relación entre el número de días enterminar una obra y el número de obreros que se emplean en dicha obra.

Nº de obreros	1	2	4	8
Nº días en terminar la obra	16	8	4	2

$Constante\ de\ proporcionalidad$: k = 1 · 16 = 2 · 8 = 4 · 4 = ⋯ = **16**

Ejemplo:

Teniendo en cuenta la tabla anterior, ¿cuánto tardarían en terminar la obra 16 obreros? Se plantea así:

$$2 \cdot 8 = 16 \cdot x \rightarrow 16 = 16 \cdot x \rightarrow x = \frac{16}{16} = 1 \rightarrow Tardarán\ 1\ día\ en\ terminar\ la\ obra$$

Existen diferentes cálculos en los cuales se debe aplicar la *proporcionalidad inversa*: la *regla de tres simple inversa* y los *repartos inversamente proporcionales*.

Actividad 2

Indica en qué casos las magnitudes que aparecen son directamente proporcionales: Contesta Si o No.

	Si / No
a) La velocidad de un vehículo y la distancia que recorre en dos horas.	
b) El coste de un lápiz y la cantidad de lápices que se pueden comprar con 10 euros.	
c) La distancia recorrida y el tiempo que se tarda en recorrerla.	
d) El número de litros de agua que contiene un depósito y su peso.	
e) La edad de una persona y su estatura.	

Actividad 3

Indica en qué casos las magnitudes que aparecen son inversamente proporcionales: Contesta Si o No.

	Si / No
a) El tiempo que trabaja una persona y el salario que recibe.	
b) Número de trabajadores en una obra y tiempo que tardan en terminarla.	
c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.	
d) Precio de un artículo e importe del I.V.A.	
e) Longitud de una circunferencia y de su diámetro.	
f) Número de vacas en un establo y tiempo para el que tienen alimento.	

Actividad 4

Calcular el término desconocido de las siguientes proporciones:

$a)\ \frac{4}{10} = \frac{x}{60}$ $\quad d)\ \frac{2}{x} = \frac{4}{8}$

$b)\ \frac{8}{32} = \frac{2}{x}$ $\quad e)\ \frac{3}{x} = \frac{x}{12}$

$c)\ \frac{x}{10} = \frac{2}{5}$ $\quad f)\ \frac{x}{6} = \frac{24}{x}$

Actividad 5

Resuelve los siguientes problemas:

a) En una granja 3 cerdos comen en un mes 60 kg de pienso, ¿cuántos kg comerán 5 cerdos en

un mes?

b) Un coche a una velocidad constante de 120 km/h tarda en ir de Madrid a Sevilla 5 horas, ¿cuántas horas tardaría un camión a una velocidad de 100 km/h?

c) Hemos comprado 3 kg de manzanas y nos han cobrado 3,45 €. ¿Cuánto nos cobrarían por 5 kg?

d) Marta ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días 126 €. ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar 340,2 €?

Actividad 6

Cuatro grifos iguales, llenan un depósito en 14 horas ¿Cuánto tardarían en rellenar el mismo depósito si tuviésemos siete grifos en vez de cuatro?

Actividad 7

En un mapa de escala 1:200.000 la distancia entre dos puntos es de 15 cm. ¿Cuál es la distancia en la realidad?

Actividad 8

A un taller de guitarra asisten 30 estudiantes. Si por cada 8 niñas hay 7 niños, ¿cuántos niños y niñas conforman el taller?

Actividad 9

Un fontanero y su ayudante, reciben por la instalación de tres sanitarios 900€, los que se reparten en la razón 7:2, ¿cuánto dinero recibirá cada uno?

1.3. Regla de tres simple.

La **regla de tres simple** es una operación que nos ayuda a resolver rápidamente problemasde *proporcionalidad*, tanto *directa* como *inversa*.

Si la relación entre las magnitudes es **directa** (cuando aumenta o disminuye una magnitud,también lo hace la otra) hay que aplicar la **regla de tres simple directa**.

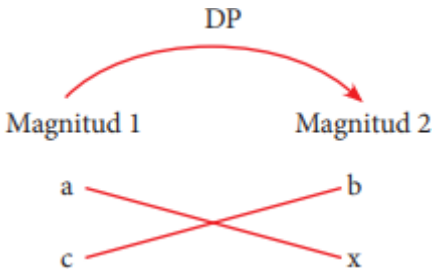
Por el contrario, si la relación entre las magnitudes es **inversa** (cuando aumenta o disminuyeuna magnitud, disminuye o aumenta la otra) se aplica la **regla de tres simple inversa**.

La *regla de tres simple* tiene como objetivo hallar el valor de una variable desconocida (que llamaremos “x”), basándose en la *relación de proporcionalidad* entre dos magnitudes. Para ello se establecen relaciones entre tres valores conocidos y una variable desconocida, tal y como se muestra la siguiente figura:

Regla de tres simple directa

$$a \rightarrow b$$
$$c \rightarrow x$$

Empezaremos viendo cómo aplicarla en casos de *proporcionalidad directa* (cuando aumentauna magnitud también lo hace la otra).



Para eso, se deben colocar en una tabla los tres datos (a los que se van a llamar "*a*", "*b*" y "*c*") y la incógnita, es decir, el dato que se quiere averiguar (que se llamará "*x*").

De forma práctica, cuando sea una **regla de tres simple directa**, se multiplica en cruz los valores de la *proporción*, igualando los resultados de la siguiente forma:

$$a \cdot x = b \cdot c \;\rightarrow\; x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Ejemplo:

María tiene que comprar pintura blanca para darle una mano previa a una habitación que quiere cambiar de color. Si en el bote de pintura se indica que con 1 litro de pintura se pueden pintar8 m^2, ¿cuántos litros necesita teóricamente para pintar las paredes de la habitación si ésta tiene 40m^2 de pared?

.

1 litro _____ 8 m^2

x _____ 40 m^2

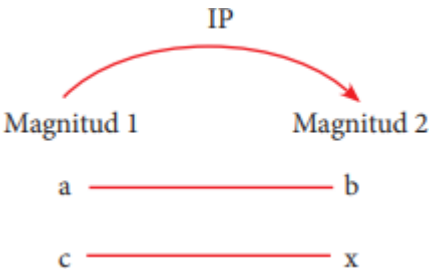
$8 \cdot x = 1 \cdot 40 \rightarrow x = (1 \cdot 40)/8 = 5 \rightarrow$ María tendrá que comprar 5 litros de pintura.

Actividad 10

En un curso, la razón entre la cantidad de hombres y de mujeres es 3:2. Si hay 24 hombres, ¿cuántos estudiantes hay en total en el curso?

Regla de tres simple inversa

Para saber cómo se hace una **regla de tres simple inversa**, se toma como ejemplo la *regla de tres simple en casos de proporcionalidad inversa* (cuando aumenta una magnitud disminuye la otra). Para eso, se colocan los tres datos y la incógnita en la tabla con una fórmula distinta:



$$a \cdot b = c \cdot x \;\rightarrow\; x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Ejemplo:

Ayer 2 camiones transportaron una mercancía desde el puerto hasta el almacén. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, han tenido que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de mercancía del almacén al puerto. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?".

3 camiones_____6 viajes

2 camiones_____x

3·6 = 2·x → x = (3·6)/2 = 9 → Ayer los 2 camiones hicieron 9 viajes.

Actividad 11

Con un depósito de agua pueden beber 30 caballos durante 8 días. Si se venden 6 caballos, ¿cuántos días durará el agua?

2. PORCENTAJES.

El **porcentaje** es una *fracción decimal* o una parte de 100. Se denomina también como **tanto por ciento**, donde por ciento significa «de cada cien unidades» y se indica con el símbolo **%**. Puede representarse también como un *número decimal*.

Ejemplo:

$$65\% = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

Una forma fácil de interpretar un *porcentaje* es como una cantidad determinada de cada 100 unidades.

Por ejemplo, 42% significa 42 de cada 100 unidades, y es equivalente a 42/100 y a 0,42. Esdecir, puede expresarse como una *fracción decimal* o como el cociente de ésta (número decimal).

Para calcular el *porcentaje* de una cantidad debemos tomar dicha cantidad y multiplicarla por el *tanto por ciento* respectivo y dividirlo entre 100.

Ejemplo:

A ver una película han entrado 120 personas, si el 45% de los espectadores que acuden a ver una película son niños, ¿cuántos espectadores son niños?

$$45\%\ de\ 120 = \frac{120 \cdot 45}{100} = \frac{5400}{100} = 54\ son\ niños$$

Ejemplo:

Una furgoneta de reparto sale con 80 mercancías, el 20% de las cuales son tablets, ¿cuántas tablets se han repartido al final de la jornada?

$$20\%\ de\ 80 = \frac{80 \cdot 20}{100} = \frac{1600}{100} = 10\ tablets\ ha\ repartido$$

Los **porcentajes** son **relaciones de proporcionalidad directa**. Por tanto, para trabajar con *porcentajes* podemos utilizar **reglas de tres directas**.

Ejemplo:

En un pueblo de 5000 habitantes, 3750 de ellos son hombres. Calcula el porcentaje de hombres de dicho pueblo.

5000____100%

3750____x

$$x = \frac{3750 \cdot 100}{5000} = 75\%$$

El 75% de los habitantes del pueblo son hombres.

Ejemplo:

Una moto cuyo precio era de 5000 €, cuesta en la actualidad 250 € más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Pensemos que el 100% del valor son 5000€. Como se incrementa en 250€, ¿cuánto supone esto?

5000 ___100

250 _____x

Multiplicamos en cruz para conocer el valor de x.

5000 ·x = 250·100 → 5000·x = 25000 → x = 25000/5000 → x = 5.

Por tanto, los 250€ suponen el 5%.

Ejemplo:

Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento del 7,5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

En este caso, 8800€ es el precio total inicial. Planteamos la regla de tres.

8800____100%

X_____7,5%

Multiplicamos en cruz y despejamos la x.

8800·7,5 = 100·x → x = 60000/100 = 600€

Este es el precio que nos descuentan. Por tanto, el precio final será: 8800 € − 660 € = 8140 €

Actividad 12

Hace dos semanas una rebeca costaba 35 €. Si ahora está en ofertas y cuesta 28 €, ¿cuál es el porcentaje de descuento?

Actividad 13

El precio de la reparación del coche del padre de Juan es de 500 € sin IVA. Si el impuesto que se aplica es del 21%, ¿cuál será el precio total de la reparación?

Actividad 14

Álvaro marcó 3 goles, que son el 25% de su total de tiros a puerta. ¿Cuántos tiros a puerta realizó?

3. INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO.

El lenguaje que utilizamos habitualmente se llama **lenguaje ordinario**, y es con el que escribimos y/o hablamos. También usamos en matemáticas el **lenguaje numérico**, en el que empleamos **números y signos aritméticos**.

Por ejemplo, vamos a expresar en *lenguaje numérico* las siguientes situaciones expresadas en *lenguaje ordinario*:

- Ana tiene 4€ y su abuela le da dos billetes de diez → $4 + 2 \cdot 10$.
- El cuadrado de cinco, más tres → $5^2 + 3$.
- La edad de Pedro es la mitad que la de su hermana María que tiene diez años → $10/2$.

Sin embargo, en muchas ocasiones no podemos utilizar sólo números, bien porque la relación que queremos expresar sea más general o bien porque no conocemos todos los datos. En estos casos se utilizan *letras* para expresar cantidades indeterminadas o que no se conocen. A estas *letras* se le denominan *variables*.

En matemáticas, una **variable** es una letra que se usa en lugar de un número desconocido en ecuaciones, expresiones y fórmulas. Por ejemplo, en la siguiente expresión, la variable *x* representa un número desconocido que al sumarle 2 dará 5.

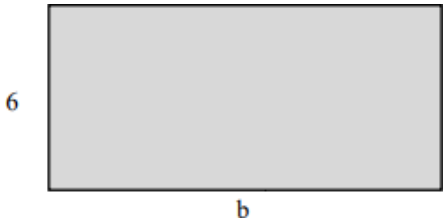
$$X + 2 = 5$$

Cuando necesitamos expresar relaciones o información matemática mediante números y letras decimos que estamos utilizando el *lenguaje algebraico.*

Se llama **lenguaje algebraico** al lenguaje que utiliza **letras** en combinación con **números y signos aritméticos**. La parte de las Matemáticas que estudia la relación entre números, letras y operaciones se denomina **Álgebra**.

En las siguientes situaciones vamos a pasar del *lenguaje ordinario* al *lenguaje algebraico*:

- Ana tiene una hucha donde guarda **sus ahorros**. Su abuela le da dos billetes de 10€ y Ana los hecha a la hucha. ¿Qué dinero tiene ahorrado Ana? → $a + 2 \cdot 10$
- La edad de pedro es la mitad de la **edad de su hermana María** → $x/2$.
- ¿Cuál es el **perímetro** de este rectángulo? → $P = b + 6 + b + 6$



- El cuadrado de **un número**, más 8 → $x^2 + 8$.

En todas las situaciones anteriores hemos asignado una *letra o variable* a valores que

desconocemos.

Como has visto el *lenguaje algebraico* permite expresar operaciones con números desconocidos. Así, se puede representar la **suma de dos números** como **x + y** y el **triple de la suma de dos números** como **3·(x + y)**.

De esta forma hemos realizado una traducción de enunciados del *lenguaje ordinario* a *lenguaje algebraico*.

El *lenguaje algebraico* tiene diferentes usos como:

- Expresar propiedades generales → Propiedad distributiva: a ·(b + c) = a ·b + a ·c.
- Escribir fórmulas → Área de un rectángulo: A = b ·h.
- Expresar igualdades → 2x + 3 = 13.

Actividad 15

Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

- El triple de un número.
- La suma de dos números consecutivos.
- La edad de una niña hace 2 años.
- La suma de dos números.

3.1. Expresión algebraica.

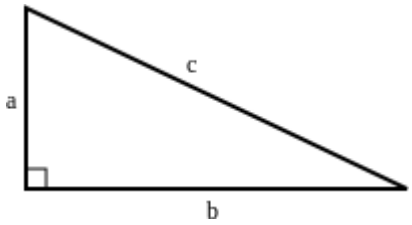
Una **expresión algebraica** es un conjunto de **números y letras** combinados con los **signos**de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Como por ejemplo: *2x +1, 5xy* + z o

Las *letras* que se utilizan en el *lenguaje algebraico* suelen ser las tres primeras letras del abecedario (a, b, c) y las tres últimas (x, y, z).

Cada expresión algebraica tiene alguna letra o letras, a las que se le llama **variables**. En elejemplo de 2 x + 1, la única variable sería la *x*.

Cuando las *expresiones algebraicas* forman una ley matemática se le llama *fórmula*. Un ejemplo puede ser el área del cuadrado, $A = x^2$.

Un ejemplo de una *expresión algebraica* es el Teorema de Pitágoras:$a^2 + b^2 = c^2$



Cuando en una expresión algebraica aparecen números y letras juntos o letras juntas, se consideran que están multiplicando, aunque no aparezca el signo de multiplicación.

Por ejemplo, 5ab + 4c = 5 ·a ·b + 4 ·c.

Actividad 16

Obtén la expresión algebraica del área de un cuadrado y el perímetro de un rectángulo.

Actividad 17

Utiliza expresiones algebraicas para expresar las siguientes informaciones.

a) El doble de la suma de dos números.
b) El cuadrado de un número más 4 unidades.
c) El producto de tres números cualesquiera.
d) La mitad de un número.
e) El doble de un número más 3 unidades.

3.2. Valor numérico de una expresión algebraica.

Si a las letras de una *expresión algebraica* se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el número que se obtiene al sustituirlas letras por números y realizar las operaciones indicadas.

Por ejemplo, vamos calcular el valor numérico de la expresión algebraica, $3\cdot(x + 2) + 2$, para $x = 2$.

Empezamos sustituyendo en la expresión algebraica la *x* por su valor y realizamos las operaciones que aparezcan indicadas en ella:

$$3 \cdot(2 + 2) + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 24$$

Es decir, el valor numérico de la expresión algebraica para $x = 2$ es 24.

Actividad 17

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para el valor de la variable que se indica (x):

a) $3x + 2y$, para $x = 1$ e $y = 2$.
b) $x^2 + 1$, para $x = -2$.
c) $3x – 2$, para $x = -1$.
d) $5a – 2b$, para $x = 3$ y $b = -1$.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Actividad 1

	V/F
$[\frac{3}{2}]=[\frac{9}{7}]$	F
$[\frac{2}{5}]=[\frac{5}{16}]$	F
$[\frac{6}{24}]=[\frac{1}{4}]$	V
$[\frac{24}{6}]=[\frac{15}{4}]$	F

Actividad 2

	Si / No
a) La velocidad de un vehículo y la distancia que recorre en dos horas.	**Si**
b) El coste de un lápiz y la cantidad de lápices que se pueden comprar con 10 euros.	**No**
c) La distancia recorrida y el tiempo que se tarda en recorrerla.	**Si**
d) El número de litros de agua que contiene un depósito y su peso.	**Si**
e) La edad de una persona y su estatura.	**No**

Actividad 3

	Si / No
a) El tiempo que trabaja una persona y el salario que recibe.	**No**
b) Número de trabajadores en una obra y tiempo que tardan en terminarla.	**Si**
c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.	**Si**
) Precio de un artículo e importe del I.V.A.	**No**
e) Longitud de una circunferencia y de su diámetro.	**No**
f) Número de vacas en un establo y tiempo para el que tienen alimento.	**Si**

Actividad 4

$a)\ \frac{4}{10} = \frac{x}{60} \rightarrow 4 \cdot 60 = 10x \rightarrow x = \frac{4 \cdot 60}{10} = \frac{240}{10} = 24.$

$b)\ \frac{8}{32} = \frac{2}{x} \rightarrow 8x = 32 \cdot 2 \rightarrow x = \frac{32 \cdot 2}{8} = 8.$

$c)\ \frac{x}{10} = \frac{2}{5} \rightarrow 5x = 10 \cdot 2 \rightarrow x = \frac{10 \cdot 2}{5} = 4.$

$d)\ \frac{2}{x} = \frac{4}{8} \rightarrow 2 \cdot 8 = 4x \rightarrow x = \frac{2 \cdot 8}{4} = 4.$

$e)\ \frac{3}{x} = \frac{x}{12} \rightarrow x^2 = 3 \cdot 12 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = \pm 6.$

$f)\ \frac{x}{6} = \frac{24}{x} \rightarrow x^2 = 6 \cdot 24 = 144 \rightarrow x = \sqrt{144} = \pm 12.$

Actividad 5

a) Es una proporcionalidad directa.

$$\frac{3}{60} = \frac{5}{x}$$

3·x = 5·60 → 3·x = 300 → x = 300/3 = 100 Kg → Los **cinco cerdos necesitarán 100 Kg**.

b) Es una proporcionalidad inversa.

120·5 = 100·x → 600 = 100·x → x = 600/100 = 6 → **El camión tardará 6 horas** en cubrir el trayecto.

c) Es una proporcionalidad directa.

$$\frac{3}{3{,}45} = \frac{5}{x}$$

3·x =5·3,45 → 3·x = 17,25 → x =17,25/3 = 5,75 → Por tanto, **los 5 kg nos costarán 5,75€**.

d) Es una proporcionalidad directa.

$$\frac{5}{126} = \frac{x}{340{,}2}$$

5·340,2 = x·126 → 1701 = x·126 → x =1701/126 = 13,5 → **Marta deberá repartir propaganda durante 13,5 días**.

Actividad 6

El problema plantea una proporcionalidad inversa.

4·14 = 7·x → 56 = 7·x → x = 56/7 = 8 → Con 7 grifos **tardaremos 8 horas en llenar el depósito**.

Actividad 7

Primero establecemos la equivalencia de la escala:

1 cm en el mapa equivalen a 200.000 cm en la realidad, es decir, a 2 km.

En la escala se plantea una relación de proporcionalidad directa:

$$\frac{1}{2} = \frac{15}{x} \rightarrow 1 \cdot x = 15 \cdot 2 \rightarrow x = 30$$

La distancia real entre los dos puntos del mapa es de 30 Km.

Actividad 8

En el taller hay un total de 30 estudiantes. Dividamos 30 entre la suma del numerador y el denominador de nuestra razón (8+7= 15). Con esto obtendremos 15 partes con 2 unidades cada una (ya que 30:15 = 2).

Si consideramos 8 partes para las niñas y 7 para los niños, habrá un total de 8·2 = 16 niñas y 7·2 =14 niños.

Otra forma de resolverlo:

8k + 7k = 30 → 15k = 30 → k = 30/15 = 2. Donde k es el nº de unidades en cada parte del total.Nº de niñas: 8k = 8·2 = 16 niñas; Nº de niños: 7k = 7·2 = 14 niños.

Actividad 9

Llamemos ***a*** al dinero que recibirá el fontanero y ***b*** al dinero que recibirá su ayudante. El fontanero y su ayudante reciben *900€*, por lo que *a* + *b* = *900€.* El dinero lo reparten en la razón de 7:2, por lo que

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2} \; o \; bien \; \frac{a}{7} = \frac{b}{2}$$

Si igualamos cada razón por separado con la constante de proporcionalidad, *k*:

$$\frac{a}{7} = k \; ; \; \frac{b}{2} = k \rightarrow a = 7k; b = 2k$$

$$a + b = 7k + 2k = 900 \rightarrow 9k = 900 \rightarrow k = \frac{900}{9} = 100$$

Si reemplazamos el valor de *k* en los valores de *a* y *b*, tendremos:

a =7·k = 7·100 = 700 → b = 2·k = 2·100 = 200

El fontanero cobrará 700€ y su ayudante 200€.

Actividad 10

Planteamos una regla de tres directa a partir de la proporción dada y los datos que nos dan:

3_____2

24_____x

x = (24·2)/3 = 48/3 = 16 → En el curso hay 16 mujeres.Por lo que en el curso **hay 40 estudiantes**, 24 hombres y 16 mujeres.

Actividad 11

Planteamos una regla de tres inversa a partir de los datos que nos dan:

30_____8

24_____x → x = (30·8)/24 = 240/24 = 10.

Por lo que **con 24 caballos el depósito durara 10 días**.

Actividad 12

35€_____100%

28€_____x

x = (28 ·100)/35 =2800/35 = 80%

Así que el descuento que nos han aplicado es: 100 – 80 = 20 %.

Actividad 13

I.V.A. = (500 ·21)/100 = 10500/100 = 105€

Precio final de la reparación: 500 + 105 = 605 €.

Actividad 14

El total de tiros (100%) es el porcentaje que tenemos que calcular sabiendo que el 25% es 3:

x_____100%

3_____25%

x·25 =100·3 → x·25 = 300 → x = 300/25 = 12

Álvaro realizó un total de 12 tiros a puerta.

Actividad 15

- El triple de un número → 3x
- La suma de dos números consecutivos → x + (x +1)
- La edad de una niña hace 2 años → x – 2
- La suma de dos números → a + b

Actividad 16

El área de un cuadrado se puede obtener con la siguiente expresión algebraica:

A = l . l = l^2

El perímetro de un rectángulo se puede obtener con la siguiente expresión algebraica:

P = x + y + x + y = 2x + 2y.

Actividad 17

a) 2·(x + y).

b) x^2 + 4.

c) x ·y ·z.

d) x/2.

e) 2x + 3.

Actividad 18

a) 3x + 2y, para x = 1 e y = 2.

3x + 2y = 3 ·x + 2 ·y → 3 ·1 + 2 ·2 = 3 + 4 = **7**.

b) x^2 + 1, para x = - 2.

$(- 2)^2$ + 1 = 4 + 1 = **5**.

c) 3x – 2, para x = - 1.

3x – 2 = 3 ·x – 2 → 3 ·(- 1) – 2 = - 3 – 2 = **- 5**.

d) 5a – 2b, para x = 3 y b = - 1.

5a – 2b = 5 ·a – 2 ·b → 5 · 3 – 2 ·(- 1) = 15 – (- 2) = 15 + 2 = **17**.